

**Memoria docente e investigadora
para la obtención
del Diploma de Estudios Avanzados.**

David Linares Galo.

Universidad de La Laguna
Junio, 2005

Índice general

Introducción.	VIII
I Fase Docente.	1
1. Ampliación de análisis real.	5
1.1. La función maximal de Hardy-Littlewood.	6
1.1.1. La función maximal clásica: propiedades y datos históricos.	6
1.1.2. El teorema maximal para la medida de Lebesgue.	7
1.1.3. Función maximal respecto a medidas doblantes.	8
1.1.4. La descomposición de Calderón-Zygmund.	9
1.1.5. Estimaciones en norma. Teorema maximal.	10
1.1.6. Breve reseña de la teoría de pesos A_p	11
1.1.7. Aplicaciones.	12
1.2. Funciones de oscilación media acotada.	16
1.2.1. El espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$	16
1.2.2. El espacio $BMO_p(\mathbb{R}^n)$	17
1.2.3. Espacios de Schwartz.	19
1.2.4. El espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$	20
2. Ampliación de análisis complejo.	23
2.1. Introducción a las funciones de varias variables complejas.	24
2.1.1. Funciones holomorfas en varias variables.	26
2.1.2. Series múltiples. Convergencia.	28
2.1.3. El problema de $\bar{\partial}$ y el Teorema de Hartog.	32
2.1.4. Funciones pluriarmónicas y plurisubarmónicas.	34
2.1.5. Problema de Levi.	36
2.2. Funciones armónicas y espacios de Hardy.	38
2.2.1. Representación integral de algunas funciones armónicas.	38
2.2.2. Espacios de Hardy.	41

2.2.3. Funciones de Nevanlinna.	44
3. Ampliación de análisis funcional.	47
3.1. El espacio de distribuciones de Schwartz.	48
3.1.1. Introducción.	48
3.1.2. El espacio de distribuciones \mathcal{D}'	49
3.1.3. Convergencia en \mathcal{D}'	49
3.1.4. Operaciones en \mathcal{D}'	51
3.1.5. Derivación en \mathcal{D}'	52
3.1.6. Producto tensorial de distribuciones. Convolución	55
3.2. Álgebras de Banach.	57
3.2.1. Álgebras de Banach.	57
3.2.2. Teoría espectral en Álgebras de Banach	57
3.2.3. Ideales y homomorfismos.	59
3.2.4. Aplicaciones.	60
3.2.5. Transformada de Gelfand.	61
4. Teoría de aproximación.	63
4.1. Interpolación racional. Existencia y unicidad de interpolantes.	65
4.1.1. Interpolación y esquemas de interpolación.	65
4.1.2. Interpolación polinómica.	67
4.1.3. Interpolación de Cauchy-Jacobi.	68
4.1.4. Aproximantes de Padé multipuntuales.	70
4.1.5. Defecto de interpolación.	71
4.1.6. Interpolación racional con polos prefijados.	72
4.2. Aproximantes de Padé y tipo Padé unipuntuales	72
4.2.1. Construcción del aproximante.	72
4.2.2. Métodos de aceleración de la convergencia de sucesiones.	74
4.3. Convergencia de interpolantes. Tres teoremas clásicos.	75
4.3.1. Teorema de Montessus de Ballore, 1902	75
4.3.2. Teorema de Markov, 1894	76
5. Optimización Poliédrica.	79
5.1. Rudimentos de la programación lineal.	80
5.1.1. Análisis convexo. Poliedros.	80
5.1.2. Algoritmo del simplex.	83
5.1.3. Dualidad.	86
5.1.4. Análisis de sensibilidad.	88
5.2. Programación lineal entera.	89

5.2.1.	Unimodularidad.	89
5.2.2.	Cortes.	91
5.2.3.	Ramificación.	92
6.	Geometría Riemmaniana.	93
6.1.	Variedades de Riemman.	95
6.1.1.	Variedades de Riemman.	95
6.1.2.	Conexión afín.	96
6.1.3.	Conexión de Riemman.	97
6.1.4.	Geodésicas.	98
6.1.5.	Curvatura de una variedad de Riemman.	100
6.1.6.	Campos de Jacobi.	101
6.2.	Variedades completas.	103
6.2.1.	Introducción.	103
6.2.2.	Variedades completas. Teorema de Hopf-Rinow.	103
6.2.3.	El Teorema de Hadamard.	104
6.3.	Espacios de curvatura constante.	105
6.3.1.	Introducción.	105
6.3.2.	Teorema de Cartan.	105
6.3.3.	Ejemplos.	106
6.3.4.	Formas espaciales.	107
6.4.	Variaciones de la energía.	108
6.4.1.	Introducción.	108
6.4.2.	Fórmulas de la primera y segunda variación de la energía.	108
6.4.3.	Aplicaciones	110
7.	Geometría diferencial de variedades II.	113
7.1.	Introducción al cálculo diferencial en \mathbb{R}^n	114
7.1.1.	Diferenciación en \mathbb{R}^n	114
7.1.2.	Derivada covariante en \mathbb{R}^n	115
7.2.	Conexión lineal sobre una variedad.	116
7.2.1.	Enfoque axiomático.	116
7.2.2.	Enfoque tensorial o clásico.	117
7.2.3.	Conexiones definidas por caminos.	119
7.2.4.	Enfoque por fibrados.	120

II Fase Investigadora.	125
1. Revisión de la Teoría de Fourier.	127
1.1. Transformada de Fourier de secuencias infinitas.	127
1.2. Convolución y filtrado de secuencias infinitas.	129
1.3. Transformada de Fourier de secuencias finitas.	132
1.4. Convolución y filtrado circular de secuencias finitas.	133
1.4.1. Filtros periodizados.	134
2. Transformadas ortonormales de series temporales.	137
2.1. Revisión de la teoría básica de transformadas ortonormales.	137
2.2. Transformada ortornormal compleja.	139
2.3. Transformada ortornormal de Fourier discreta.	140
3. Transformada wavelet discreta.	145
3.1. La esencia de una wavelet.	145
3.2. La esencia del análisis wavelet.	146
3.3. Descripción cualitativa de la DWT.	149
3.4. El algoritmo piramidal.	157
3.4.1. El filtro wavelet	158
3.4.2. El filtro escala.	164
3.4.3. Primera etapa del algoritmo piramidal.	168
3.4.4. Segunda etapa del algoritmo piramidal.	171
3.4.5. Etapa general del algoritmo piramidal.	175
3.5. Transformada discreta wavelet parcial.	183
3.6. Wavelet de Daubechies.	184
3.7. Wavelet de Coiflet.	191
4. Ejemplos.	195
4.1. Ejemplos ilustrativos.	195
4.1.1. Suma de tres frecuencias puras.	196
4.1.2. Cambio brusco en la frecuencia.	198
4.1.3. Ruido.	200
4.1.4. Discontinuidades.	202
4.1.5. Triangulo más seno.	204
4.2. Ejemplos reales.	206
4.2.1. Electrocardiograma (ECG).	206
4.2.2. Consumo eléctrico (ECS).	216
4.3. Consideraciones prácticas.	217

4.3.1.	Elección del filtro wavelet.	222
4.3.2.	Condiciones de frontera.	222
4.3.3.	Series con número de elementos que no es potencia de 2.	225
4.3.4.	Elección del nivel J_0 para la DWT parcial.	226
5.	Transformada wavelet discreta de máximo solapamiento.	229
5.1.	Descripción cualitativa de la MODWT.	229
5.2.	Efecto de las traslaciones circulares en la DWT.	230
5.3.	Filtros wavelet y escala MODWT.	232
5.4.	Conceptos básicos de la MODWT.	233
5.5.	Coefficientes MODWT de nivel j	237
5.6.	Algoritmo piramidal MODWT.	241
5.7.	Ejemplos reales.	245
5.7.1.	Electrocardiograma (ECG).	245
5.7.2.	Fluctuaciones subtidiales del nivel del mar (SSLF).	246
5.7.3.	Nivel mínimo del Nilo (NRM).	248
A.	Rutinas de MATLAB.	253
A.1.	Revisión de la teoría de Fourier.	253
A.1.1.	Filtro periodizado.	253
A.2.	Transformadas ortonormales de series temporales.	254
A.2.1.	Matriz de paso de la ODFT.	254
A.2.2.	Análisis detallado y componentes suaves/rugosas de Fourier.	255
A.2.3.	Rutina de control.	258
A.3.	Transformada wavelet discreta.	258
A.3.1.	Matriz de paso de diversas DWT.	258
A.3.2.	Ejemplo de las series cortas.	260
A.3.3.	Filtros wavelet y escala de diversas anchuras.	263
A.3.4.	Filtros de orden superior de la transformada DWT.	264
A.3.5.	Análisis detallado y componentes suaves/rugosas DWT.	265
A.3.6.	Rutina de control.	269
A.4.	Ejemplos.	273
A.4.1.	Coefficientes frontera en la transformación DWT.	273
A.4.2.	Ejemplos ilustrativos.	274
A.4.3.	Rutina de control.	279
A.5.	Transformada wavelet discreta de máximo solapamiento.	282
A.5.1.	Análisis detallado y componentes suaves/rugosas MODWT.	282
A.5.2.	Rutina de control.	286

Bibliografía

289

Índice de figuras

2.1. La figura de Hartog	31
2.2. Extensión en la figura de Hartog.	32
1.1. Filtrado paso bajo.	131
1.2. Filtrado paso alto.	132
2.1. Matriz de la ODFT para $N = 16$	141
3.1. Ejemplos de wavelet.	146
3.2. Ejemplos con la wavelet de Haar.	147
3.3. Matriz de la DWT de Haar con $N = 16$	151
3.4. Matriz de la DWT de Daubechies, $D(4)$, con $N = 16$	152
3.5. Diversas transformadas de la serie \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2	156
3.6. Diversas transformadas de la serie \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2	157
3.7. Análisis MRA de Fourier de la secuencia \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2	158
3.8. Análisis MRA de Fourier de la secuencia \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2	159
3.9. Análisis MRA con la DWT de Haar y $D(4)$ de la serie \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2	160
3.10. Análisis MRA con la DWT de Haar y $D(4)$ de la serie \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2	161
3.11. Ganancia cuadrática de órdenes 1 y 2 de los filtros de Haar	181
3.12. Filtro con paso ni alto ni bajo.	185
3.13. Filtros escala y wavelet $D(L)$	188
3.14. Filtros escala y wavelet de $LA(L)$	189
3.15. Filtros escala y wavelet de orden superior de $D(4)$	190
3.16. Filtros escala y wavelet de orden superior de $LA(8)$	191
3.17. Filtros escala y wavelet de $C(L)$	192
3.18. Filtros escala y wavelet de orden superior para $C(6)$	193
4.1. Análisis de una señal que consta de tres frecuencias puras.	196
4.2. Análisis de una señal que consta de tres frecuencias puras.	197
4.3. Análisis de una señal que tiene un cambio brusco aislado de frecuencia.	198

4.4. Análisis de una señal que tiene un cambio brusco aislado de frecuencia. . .	199
4.5. Análisis de una señal con ruido uniforme	200
4.6. Análisis de una señal de ruido normal.	201
4.7. Análisis de una señal compuesta por los valores de una función escalonada.	202
4.8. Análisis de una señal compuesta por los valores de una función escalonada.	203
4.9. Análisis de una señal compuesta por un triángulo y un seno.	204
4.10. Análisis de una señal compuesta por un triángulo y un seno.	205
4.11. Transformadas DWT de la serie ECG.	207
4.12. Análisis MRA con Haar de la serie ECG	208
4.13. Aproximaciones de orden superior con Haar de la señal ECG	209
4.14. Análisis MRA con $D(4)$ de la serie ECG	210
4.15. Aproximaciones de orden superior con Haar de la señal ECG	211
4.16. Análisis MRA con $C(6)$ de la serie ECG	212
4.17. Aproximaciones de orden superior con $C(6)$ de la señal ECG	213
4.18. Análisis MRA con $LA(8)$ de la serie ECG	214
4.19. Aproximaciones de orden superior con $LA(8)$ de la señal ECG	215
4.20. Análisis MRA con $LA(8)$ de la señal ECS	218
4.21. Aproximaciones de orden superior de la serie ECS	219
4.22. Análisis MRA con $LA(8)$ de un día a partir del mediodía de la señal ECS	220
4.23. Análisis MRA con $LA(8)$ de un trozo de la noche de la señal ECS	221
5.1. Efecto de las traslaciones en la DWT.	231
5.2. Ilustración del porqué del efecto de las traslaciones en la DWT.	232
5.3. Análisis MRA MODWT con $LA(8)$ de la serie ECG	247
5.4. Análisis MRA MODWT con $LA(8)$ de la señal SSLF	249
5.5. Análisis MRA MODWT con Haar de la señal NRM	250

Índice de cuadros

3.1. Primera etapa del algoritmo piramidal para el cálculo de la DWT	169
3.2. Análisis en la segunda etapa del algoritmo piramidal.	172
3.3. Síntesis en la segunda etapa del algoritmo piramidal	174
3.4. Segunda etapa del algoritmo piramidal para el cálculo de la DWT	175
3.5. Etapa general del algoritmo piramidal para el cálculo de la DWT	178
3.6. Sumario del algoritmo piramidal para el cálculo de la DWT.	182
4.1. Coeficientes frontera en la transformada DWT de anchura L	224
5.1. Etapa general del algoritmo piramidal para el cálculo de la MODWT	242
5.2. Sumario del algoritmo piramidal para el cálculo de la MODWT.	244

Introducción.

Esta memoria recoge la labor realizada por el alumno David Linares Galo en el programa de doctorado de “Matemáticas” del bienio 2002-2004, inscrito en la línea de investigación de “Análisis Real” bajo la tutela del profesor Dr. D. Rodrigo Trujillo González del departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.

El programa esta constituido por dos fases, docente (20 cr.) e investigadora (12 cr.), que suponen un total de 32 créditos. La primera parte resume los contenidos de los cursos asistidos durante la “Fase Docente” del programa que suponen un total de 21 créditos. En la segunda parte se exponen los contenidos y resultados estudiados durante la “Fase de Investigación” y que suponen un total de 12 créditos.

De forma paralela, la memoria se divide en dos partes:

Parte I : Fase Docente.

Parte II: Fase Investigadora.

En la parte I, se recoge un guión con las definiciones, resultados y ejemplos más ilustrativos de cada uno de los cursos de doctorado asistidos a lo largo de la Fase Docente. Se omiten las demostraciones aunque se incluyen notas y ejemplos pues se pretende ilustrar los contenidos y desarrollo de cada uno de los mismos. La elección concreta de los cursos se hizo tratando de focalizarlos en análisis, geometría, topología, optimización, análisis numérico y tópicos relacionados. Los capítulos están ordenados de acuerdo al listado que aparece más adelante.

En cuanto a la parte II, presentamos el trabajo realizado en torno a la transformada discreta wavelet (DWT) y una modificación de mejora en la transformada wavelet discreta de máximo solapamiento (MODWT) para evitar su sensibilidad extrema a las traslaciones así como en un algoritmo ‘eficiente’ descrito por Mallat en 1989 en [5] para su cómputo. También se han incluido una batería de ejemplos teóricos con intención de ilustrar el tratamiento que hace tal transformación con señales elementales. Hemos intentado hacer esta exposición tan autocontenida y accesible como ha sido posible y nuestra sincera esperanza es que pueda servir al lector como una guía de los principios básicos de las wavelet y como una colección de técnicas para análisis wavelet aplicado.

La idea fundamental que está detrás de las wavelet es el análisis de acuerdo a diferentes escalas. De hecho se dice que usando wavelets se cambia la idea en el análisis o procesamiento de series de datos. Las wavelets son funciones que satisfacen determinados requerimientos matemáticos y que sirven para representar datos o otras funciones. La idea no es nueva, este tipo de aproximación existe desde que en los principios de 1800, Joseph Fourier descubrió que podía superponer senos y cosenos para representar otras funciones. Sin embargo, con la idea del análisis por escalas, con una escala grande detectaremos características amplias, mientras que con una escala pequeña, características pequeñas. Ésta es la ganancia sustancial del análisis wavelet frente al de Fourier, representa mejor las señales afiladas. En términos coloquiales, el análisis de Fourier puede ver los árboles mientras que el wavelet, los árboles y el bosque.

Tras una una revisión de los conceptos y resultados elementales de la Teoría de Fourier (Cap. 1) y de las transformadas ortonormales de series temporales (Cap. 2), este trabajo cubre los dos tópicos fundamentales que trata en los Capítulos 3 y 5 respectivamente. El Capítulo 4 corresponde a una batería de ejemplos ilustrativos que pretenden ilustrar el comportamiento de la DWT con señales elementales. Además se incluyen dos ejemplos de señales reales. Destacar que en el Capítulo 5 se aborda el análisis de uno de estos ejemplos reales para ilustrar las diferencias entre la DWT y la MODWT y el análisis de nuevos ejemplos reales. En el apéndice A se recogen las rutinas de MATLAB[®] empleadas, tanto para la construcción de los ficheros de datos para generar las gráficas como para el análisis DWT y MODWT de las series que aparecen.

Los contenidos tratados en esta memoria son el punto de partida de libros, conferencias y publicaciones recientes. Las técnicas empleadas se utilizan sistemáticamente en otras disciplinas tales como transmisión y compresión de datos (standard del FBI para huellas digitales y standard JPEG2000), limpieza de señales tales como las de audio o video o detección de puntos de ruptura en señales. El F.B.I. tiene almacenados 30 millones de juegos de huellas dactilares (e.d. 300 millones de huellas) recolectados en los arrestos. De los 40.000 nuevos juegos de huellas que llegan diarios, 5000 son nuevos para almacenar y 15000 son repetidos. Se hace necesario un buen sistema de compresión de datos que conserve finamente la calidad para posteriores identificaciones y que sea rápido. El standard que adopta el F.B.I. se basa en un algoritmo Wavelet Scalar Quantization para una escala de grises de 256 tonos. Al principio se pensó que ganaría el JPEG standard por su ratio de compresión de 20:1 frente al de WSQ, de 15:1. Sin embargo, en unas comprobaciones del F.B.I., se detectaron líneas que debían estar separadas y estaban unidas. En el algoritmo wavelet, esto no ocurría.

Para nosotros el libro de Pecival, D.B. y Walden, A.T. [8] ha sido de muy gran valor y los capítulos principales están basados en él. Además, las rutinas del apéndice A están construidas a partir del Toolbox que acompaña al texto. Los libros de Vetterli, M. y

Kovacevic, J. [10] y de Strang, G. y Nguyen, T. [9] contienen algunas referencias a la terminología y bancos de filtros usados en ingeniería así como algunas referencias históricas incluidas en esta memoria. Otras fuentes empleadas provienen de manuales de instrucciones y documentos acerca de wavelets que se encuentran en <http://www.wavelet.org>. Finalmente consideramos de sumo grado de importancia el texto *El libro de L^AT_EX* [3] en cuanto a lo que corresponde a la elaboración del documento final.

Queremos dar agradecimientos a todos aquellos que han contribuido directa o indirectamente a la elaboración de este trabajo haciendo especial hincapié en,

Dr. D. José Manuel Méndez Pérez,

Dr. D. Rodrigo Trujillo González.

que, sin ellos, hubiera sido imposible la consecución.

Finalmente quiero agradecer profundamente a Dña. Rosario Galo Gómez su apoyo y coraje (verdadera alma en la sombra de esta cruzada) sin la cual hubiese sido imposible la realización de este trabajo el cual le brindo.

La Laguna, 1 de septiembre de 2005.

Parte I

Fase Docente.

En el capítulo que se expone a continuación se presentan los contenidos correspondientes a las asignaturas cursadas durante la fase docente que suponen un total de 21 créditos (210 horas):

- **Ampliación de análisis real** (3 cr.) impartido por los profesores Dr. D. Jorge Betancor Pérez y Dr. D. Rodrigo Trujillo González.
- **Ampliación de análisis complejo** (3 cr.) impartido por los profesores Dr. D. Fernando Pérez González y Dr. D. Manuel Flores Mederos.
- **Ampliación de análisis funcional** (3 cr.) impartido por los profesores Dr. D. José Manuel Méndez Pérez y Dr. D. Juan Carlos Fariña Gil.
- **Teoría de aproximación** (3 cr.) impartido por el profesor Dr. D. Mateo M. Jiménez Paiz.
- **Optimización Poliédrica** (3 cr.) impartido por el profesor Dr. D. Juan José Salazar González.
- **Geometría Riemmaniana** (3 cr.) impartido por el profesor Dr. D. Domingo Chinaa Miranda.
- **Geometría diferencial de variedades II** (3 cr.) impartido por el profesor Dr. D. Ángel Montesdeoca Delgado.

Capítulo 1

Ampliación de análisis real.

Este curso, dividido en dos partes, aborda en su primera parte el estudio de la función maximal de Hardy-Littlewood y la descomposición de Calderón-Zygmund haciendo un breve hincapié en la teoría de pesos y ciertas aplicaciones de dichos conceptos; y en su segunda parte, las funciones de oscilación media acotada y los espacios de Schwartz.

El programa del curso se detalla a continuación:

1.1. La función maximal de Hardy-Littlewood.

1.1.1. La función maximal clásica: propiedades y datos históricos.

1.1.2. Teorema maximal para la medida de Lebesgue.

1.1.3. La función maximal respecto a medidas doblantes.

1.1.4. Descomposición de Calderón-Zygmund.

1.1.5. Estimaciones en norma. Teorema maximal.

1.1.6. Breve reseña de la teoría de pesos A_p .

1.1.7. Aplicaciones.

1.1.7.1. Teorema de diferenciación de Lebesgue.

1.1.7.2. Aproximaciones de la identidad.

1.1.7.3. Teorema de Zó.

1.2. Funciones de oscilación media acotada.

1.2.1. El espacio $\mathbf{BMO}(\mathbb{R})$.

1.2.2. El espacio $\mathbf{BMO}_p(\mathbb{R}^n)$.

1.2.3. Espacios de Schwartz.

1.1. La función maximal de Hardy-Littlewood.

1.1.1. La función maximal clásica: propiedades y datos históricos.

La función maximal de Hardy-Littlewood aparece en 1930 en el marco real, siendo N. Wiener quien la desarrolla para el espacio \mathbb{R}^n en 1939. La definición que adoptamos es la siguiente.

Definición 1.1.1. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, se define la *función maximal de Hardy-Littlewood* como

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos Q centrados en x y con lados paralelos a los ejes.

Observación 1.1.1. Podemos considerar definiciones alternativas de este operador, por ejemplo, tomando bolas en lugar de cubos pero, como para cada $r > 0$, existen cubos q_x y Q_x centrados en x tales que q_x está inscrito en $B(x, r)$ y Q_x circunscrito, esto es,

$$A_n |q_x| \leq |B(x, r)| \leq B_n |Q_x|$$

se concluye, por el teorema del bocadillo, que las definiciones son equivalentes.

Estamos interesados en conocer las propiedades de la función maximal que se heredan de la función que la define. Estudiaremos primero la medibilidad.

Teorema 1.1.1. *La función maximal, $Mf(x)$, es semicontinua superiormente, luego es medible.*

A la vista de este resultado cabe preguntarse si $Mf(x)$ es integrable cuando lo es f . La respuesta es negativa cuando $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pero sirve para un estudio más profundo. El primer objetivo es estudiar el tamaño del conjunto

$$E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n / Mf(x) > \lambda\}$$

que nos proporcionará una idea de la magnitud de $Mf(x)$.

Este conjunto satisface, para funciones integrables, que

$$|\{ |g| > \lambda \}| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy$$

No obstante, existen funciones no integrables que satisfacen desigualdades similares. Esa es la clase $wk-L^1(\mathbb{R}^n)$ o *clase de Marcinkiewick*.

$$wk-L^1(\mathbb{R}^n) = \left\{ f / \exists c > 0 : |\{ |f| > \lambda \}| < \frac{c}{\lambda}, \forall \lambda > 0 \right\}$$

que cumple que $L^1(\mathbb{R}^n) \subsetneq wk-L^1(\mathbb{R}^n)$ debido a que $\lambda |\{ |f| > \lambda \}| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx$

Veremos que la función maximal de una función de $L^1(\mathbb{R}^n)$ está en la clase de Marcinkiewich mientras que la de una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ está en $L^p(\mathbb{R}^n)$

1.1.2. El teorema maximal para la medida de Lebesgue.

Comenzamos con dos lemas que se usan para la prueba del teorema maximal.

Lema 1.1.1. *Consideremos E un conjunto medible de \mathbb{R}^n que es recubierto por una familia de cubos (bolas) $\{B_i\}$ de diámetro acotado. Entonces podemos extraer una subfamilia disjunta $\{Q_j\}$ que satisfaga que*

$$|E| \leq 5^n \sum_j |Q_j|$$

Lema 1.1.2. *Sea f una función medible y $0 < p < \infty$. Entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \lambda\}| d\lambda$$

Observación 1.1.2. Dada f función medible y $0 < p < \infty$, por definición de integral de Lebesgue se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = - \int_0^\infty \lambda^p dm_f(\lambda)$$

donde $m_f(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \lambda\}|$

El teorema maximal fue demostrado por Hardy y Littlewood en 1930 para $n = 1$ y por Wiener en 1939 cuando $n > 1$.

Teorema 1.1.2 (Teorema maximal). *Consideremos una función definida en \mathbb{R}^n*

1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

$$|\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \lambda\}| \leq \frac{A_1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy, \quad \forall \lambda > 0 \quad (1.1)$$

donde A_1 es una constante absoluta (n fijo).

2. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p \leq \infty$ entonces*

$$Mf(x) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad (1.3)$$

donde A_p es una constante que depende de p .

Corolario 1.1.1. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ entonces $Mf(x)$ es finita en casi todo punto.*

Observación 1.1.3. En la prueba del teorema anterior aparecen dos condiciones interesantes. Una desigualdad,

$$\frac{c}{\lambda} \int_{\{|f|>\lambda\}} |f(y)| dy \leq |E_\lambda| \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f(y)| dy \quad (1.4)$$

y una expresión para A_p

$$A_p = \frac{2^{p-1} A p}{p-1} \quad (1.5)$$

que no es mejorable e indica la imposibilidad de obtener un resultado similar para $p = 1$.

Para $p < 1$ no se puede obtener un resultado global pero sí local, que viene dado por la desigualdad de Kolmogorov.

Teorema 1.1.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces*

1. $Mf \in L^q(E)$, $0 < q < 1$ para cualquier conjunto E de medida finita.

2.
$$\int_E (Mf(x))^q dx \leq C_q |E|^{1-q} \|f\|_1^q$$

Observación 1.1.4. Destacar que el resultado anterior es válido para cualquier operador T que satisfaga

$$|\{x \in \mathbb{R}^n / |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \|f\|_1$$

para toda $\lambda > 0$ y toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Todo operador en estas circunstancias se dice que es **débil-(1,1)**.

El teorema siguiente muestra una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad de la función maximal.

Teorema 1.1.4. *Sea f una función integrable soportada en una bola $B \subset \mathbb{R}^n$. Entonces $Mf \in L^1(B)$ si y sólo si*

$$\int_B |f(x)| \log^+ |f(x)| dx < \infty \quad (1.6)$$

donde $\log^+ x = \begin{cases} \log x & , \quad x \geq 1 \\ 0 & , \quad x < 1 \end{cases}$

1.1.3. Función maximal respecto a medidas doblantes.

Abordaremos, en esta sección, una generalización de la anterior para medidas doblantes. El objetivo es el estudio de una de las herramientas básicas del análisis armónico, la descomposición de Calderón-Zygmund.

Definición 1.1.2. Sea μ una medida de Borel positiva y regular en \mathbb{R}^n . Se dice que μ es una **medida doblante** si para todo cubo Q

$$\mu(2Q) \leq C_\mu \mu(Q)$$

donde $C_\mu > 1$ es independiente de Q .

De aquí en adelante cuando se diga μ medida doblante entenderemos que se trata de una medida de Borel positiva y regular.

Proposición 1.1.1. *Sea μ una medida doblante, entonces*

1. *Para cada $\alpha > 0$, existe $c_\alpha = c(\alpha, \mu)$ tal que $\mu(\alpha Q) \leq c_\alpha \mu(Q)$ para todo cubo Q .*
2. *Si $\mu \not\equiv 0$ entonces $\mu(Q) > 0$ para todo cubo Q .*
3. *Existe $k > 1$ tal que para todo cubo diádico Q' conteniendo un cubo arbitrario Q se cumple que $\mu(Q) \geq k\mu(Q')$*
4. *Para todo $a > 0$ existe $B > 0$ tal que cualesquiera cubos disjuntos Q y R satisfaciendo que $|Q| \leq A|R|$ se cumple que $\mu(Q) \leq B\mu(R)$*

Definición 1.1.3. Dada $f \in L^1_{loc}(\mu)$, definimos la **función maimal de Hardy-Littlewood con respecto a la medida μ de f** por

$$M_\mu f(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y) \quad (1.7)$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos que contienen a x y de lados paralelos a los ejes.

Proposición 1.1.2. *$M_\mu f$ es semicontinua superiormente y por tanto, medible.*

Observación 1.1.5. En la prueba de la proposición anterior se deduce que

$$E_\lambda = \bigcup_{x \in E_\lambda} Q_x$$

con lo cual para medir el conjunto E_λ basta saber medir la familia de cubos. La estrategia se basa en saber elegir la familia y es en lo que se basa la descomposición de Calderón-Zygmund.

1.1.4. La descomposición de Calderón-Zygmund.

La elección de la familia de cubos que recubra E_λ no sólo nos dará la estructura sino que además obtendremos la condición de $wk-L^1(\mu)$ para el operador.

Teorema 1.1.5. *Sea μ una medida doblante en \mathbb{R}^n , $f \in L^1(\mu)$ y $\lambda > 0$. Entonces:*

1. *Existe una familia C_λ de cubos diádicos disjuntos tales que cada cubo Q de la familia es maximal con respecto a la desigualdad*

$$\lambda < \frac{1}{\mu(Q)} \int_Q |f(y)| d\mu(y) \leq C_\mu \lambda$$

donde C_μ es la constante de la condición doblante. A esta familia se le conoce como **descomposición de Calderón-Zygmund a nivel λ** .

2. $E_\lambda = \bigcup_{Q \in \mathcal{C}_{\frac{\lambda}{2}}} 3Q$ donde c es una constante que depende sólo de la dimensión y la medida. Además,

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y)$$

que prueba que $M_\mu f \in \text{wk-}L^1(\mu)$.

3. Existen constantes c y c' tales que

$$\frac{c}{\lambda} \int_{\{x/|f(x)| > \lambda\}} |f(y)| d\mu(y) \leq \mu(E_\lambda) \leq \frac{c'}{\lambda} \int_{\{x/|f(x)| > \frac{\lambda}{2}\}} |f(y)| d\mu(y)$$

1.1.5. Estimaciones en norma. Teorema maximal.

Buscamos, en esta sección, los teoremas análogos de acotación en norma vistos para la función maximal clásica en la primera sección. Ya tenemos un resultado, a partir de la descomposición de Calderón-Zygmund y en la descomposición débil-(1,1).

Teorema 1.1.6. Sea μ una medida doblante en \mathbb{R}^n y $f \in L^1(\mu)$ entonces

$$M_\mu f \in \text{wk-}L^1(\mu)$$

esto es para cada $\lambda > 0$

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| d\mu(y)$$

Podemos, a partir de este resultado, establecer las estimaciones en norma $L^p(\mu)$ para $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 1.1.7 (Teorema maximal). Dada μ una medida doblante y $1 < p \leq \infty$, existe una constante $c_p > 0$ tal que

$$\|M_\mu f\|_{L^p(\mu)} \leq c_p \|f\|_{L^p(\mu)}$$

Observación 1.1.6. De la demostración del teorema se infiere que $c_p = \frac{cp2^p}{p-1}$ obteniéndose que

$$\begin{aligned} M_\mu: L^p(\mu) &\longrightarrow L^p(\mu) \text{ para } 1 < p \leq \infty \\ M_\mu: L^1(\mu) &\longrightarrow \text{wk-}L^1(\mu) \end{aligned}$$

es decir, se tratan de un operador tipo (p, p) y tipo débil-(1, 1) respectivamente.

1.1.6. Breve reseña de la teoría de pesos A_p .

En lo que hemos visto hasta ahora se ha considerado el comportamiento del operador maximal con respecto a la medida que lo define. Nos planteamos ahora ilustrar sin mucha profundidad cómo es dicho comportamiento para la función maximal clásica con respecto a la medida de Lebesgue a la hora de satisfacer acotaciones en norma respecto a una medida no interviniente en su definición. Trataremos de estudiar las condiciones que conducen a que el operador maximal M se de tipo débil-(1,1) en $L^1(\mu)$ o de tipo (p,p) en $L^p(\mu)$. Un resultado preliminar aclara de qué forma pueden resolverse estas cuestiones.

Teorema 1.1.8 (C. Fefferman - E. Steir (1971)). *Para toda función ϕ medible positiva y toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene que M es de tipo débil-(1,1) de $L^1(M\phi)$ en $L^1(\phi)$, es decir,*

$$\int_{\{x/Mf(x)>\lambda\}} \phi(x)dx \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|M\phi(x)dx$$

Los dos resultados siguientes caracterizan las condiciones mencionadas anteriormente.

Teorema 1.1.9 (Condición A_1). *Sea μ una medida de Borel positiva y finita sobre conjuntos acotados. El operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo débil-(1,1) en $L^1(\mu)$, es decir,*

$$\mu(\{x / Mf(x) > \lambda\}) \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|d\mu(y)dy$$

si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, esto es, $d\mu(x) = w(x)dx$ donde w es una función positiva y localmente integrable que satisface la condición A_1 de Muckenhoupt

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \leq C \cdot \inf_Q w(x)$$

para todo cubo Q con C constante no dependiente del mismo.

Teorema 1.1.10 (Condición A_p). *Sea μ una medida de Borel positiva y finita sobre conjuntos acotados. El operador maximal de Hardy-Littlewood es de tipo (p,p) en $L^p(\mu)$ para $1 < p \leq \infty$, es decir,*

$$\|Mf\|_{L^p(\mu)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mu)}$$

si y sólo si μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, esto es, $d\mu(x) = w(x)dx$ donde w es una función positiva y localmente integrable que satisface la condición A_p de Muckenhoupt

$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x)dx \right) \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w(x))^{\frac{1}{p-1}} dx \right)^{p-1} \leq C$$

para todo cubo Q con C constante no dependiente del mismo.

En los siguientes resultados se describen las condiciones que deben satisfacer dos pesos $u(x)$ y $v(x)$ para obtener estimaciones en norma análogas a las anteriores.

Definición 1.1.4. Decimos que dos funciones $u(x)$ y $v(x)$ positivas y localmente integrables verifican la condición A_p para $1 \leq p < \infty$ si

$$p = 1 \quad , \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \sup_Q \frac{1}{v(x)} \leq C$$

$$1 < p < \infty \quad , \quad \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(x) dx \right) \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q (w(x))^{-\frac{1}{p-1}} dx \right) \leq C_1$$

que se denotará mediante $(u, v) \in A_p$.

Teorema 1.1.11 (Caso débil). M es de tipo débil- (p, p) de $L^p(v)$ en $L^p(u)$, es decir,

$$\int_{\{Mf > \lambda\}} u(x) dx \leq \frac{c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| v(y) dy$$

si y sólo si $(u, v) \in A_p$ siendo $1 \leq p < \infty$

Teorema 1.1.12 (Caso fuerte). Sea $1 < p \leq q \leq \infty$ con $p < \infty$ y $u(x), v(x)$ funciones positivas localmente integrables que satisfacen que $u(x) dx$ y $v(x)^{-\frac{1}{p-1}}$ son medidas doblantes. Entonces

$$\|Mf\|_{L^q(u)} \leq C \|f\|_{L^p(v)}$$

si y sólo si

$$\left\{ \int_Q \left[M \left(\chi_Q v^{-\frac{1}{p-1}} \right) (x) \right]^q u(x) dx \right\}^{\frac{1}{q}} \leq C \left\{ \int_Q v(x)^{-\frac{1}{p-1}} dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

1.1.7. Aplicaciones.

El objetivo de esta sección es mostrar aplicaciones interesantes de la función maximal y sus propiedades.

1.1.7.1 Teorema de diferenciación de Lebesgue.

En lo siguiente se mostrará una de las más bellas aplicaciones de las propiedades de la función maximal. Nos interesa saber cuándo es cierto que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|Q(x, r)|} \int_{Q(x, r)} f(y) dy = f(x) \quad (1.8)$$

siendo f una función integrable.

En el caso de $n = 1$ esta cuestión nos conduce al teorema fundamental del cálculo, que con funciones discontinuas no se satisface con la característica de $(0, 1)$ como ejemplo. Este resultado sugiere las preguntas

- ¿En qué puntos existe el límite en (1.8)?

- ¿En que casos coincide con $f(x)$?

Teorema 1.1.13 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). Consideremos μ una medida doblante, positiva, Borel y regular en \mathbb{R}^n y sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(Q(x,r))} \int_{Q(x,r)} f(y) d\mu(y) = f(x) \quad (1.9)$$

en casi todo punto respecto de μ (denotado por c.t.p. - $[\mu]$).

Corolario 1.1.2. Además, en las condiciones anteriores, se tiene que

$$|f(x)| \leq M_\mu f(x) \text{ en c.t.p. } - [\mu]$$

Proposición 1.1.3. Consideremos una medida μ como antes y sea $f \in L^1_{loc}(\mu)$. Entonces

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n / M_\mu f(x) > \lambda\}) > \frac{c}{\lambda} \int_{\{x/f(x) > \lambda\}} |f(y)| d\mu(y) dy$$

1.1.7.2 Aproximaciones de la identidad.

Dadas dos funciones integrables $f = f(x)$ y $g = g(x)$ se define la convolución como la operación

$$f \star g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy$$

En lo que sigue mostraremos algunas propiedades interesantes de la convolución de funciones.

Proposición 1.1.4. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

Además si alguna de las dos funciones tiene soporte compacto entonces $f \star g$ también lo tendrá.

Lema 1.1.3. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces $\lim_{|h| \rightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0$, es decir, el operador traslación $T(y) = f(x-y)$ es continuo de \mathbb{R}^n en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p \leq \infty$

Teorema 1.1.14. La convolución de una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ y otra de clase m con soporte compacto resulta una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$ que es de clase m .

Los dos siguientes operadores que se definen son importantes para la prueba de que el espacio de las funciones de clase infinito con soporte compacto es un conjunto denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$ resultado que surge como consecuencia del teorema que sigue y que precisa del siguiente lema.

Dada una función $\varphi = \varphi(x)$ y $\varepsilon > 0$, definimos

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varepsilon \varphi(x) &= \varphi(\varepsilon x) \\ \varphi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Lema 1.1.4. Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

1. $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx, \forall \varepsilon > 0$
2. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{|x| > \delta\}} \varphi_\varepsilon(x) dx = 0$
3. $(\mathcal{T}_{\varepsilon^{-1}} \cdot T \cdot \mathcal{T}_\varepsilon)(f) = \varphi_\varepsilon \star f$

Teorema 1.1.15. Sea $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$. Entonces

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f \star \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0$$

2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, en todo punto de continuidad de f se tiene que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f \star \varphi_\varepsilon(x) = f(x)$$

1.1.7.3 Estimaciones de familias de convoluciones. Teorema de Zó.

En el apartado anterior abordábamos el estudio de familias de convoluciones con las dilataciones de una función dada. Todos los resultados partían de las exigencias a dicha función. Nos planteamos ahora las mismas cuestiones para las convoluciones con una familia de funciones. En particular, dada la familia $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones, que denominaremos núcleos, nos preguntamos qué condiciones mínimas deben verificarse para que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} K_\alpha \star f = f$$

entendiéndose que en el conjunto indicial A se satisface que $0 \in A'$.

Para responder a esta cuestión necesitamos la versión completa de la descomposición de Calderón-Zygmund.

Teorema 1.1.16 (Teorema de Zó). Sea $\{K_\beta\}_{\beta \in A}$ una familia de funciones verificando

1. $\sup_{\beta \in A} \int_{\mathbb{R}^n} |K_\beta(x)| dx \leq B < \infty$
2. $\int_{|x| > 2|y|} \sup_{\beta \in A} |K_\beta(x-y) - K_\beta(x)| dx \leq B$

y consideremos $f^*(x) = \sup_{\beta \in A} |K_\beta \star f(x)|$. Entonces existen constantes A_1 y A_p tales que

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{R}^n / f^*(x) > \lambda\}| &\leq \frac{A_1}{\lambda} \|f\|_1 \\ \|f^*\|_p &\leq A_p \|f\|_p \text{ para } 1 < p \leq \infty \end{aligned}$$

Además, si $\|Hf\|_p \leq c_p \|f\|_p$, para

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{x} dx = f^* \left(\frac{1}{x} \chi_{|x|>\varepsilon}(x) \right)$$

la transformada de Hilbert, entonces se sigue que

$$S_n(f) \longrightarrow f \text{ en } L^p(\mathbb{R}^n)$$

donde $S_n(f)$ es la suma parcial n -ésima de Fourier de f .

1.2. Funciones de oscilación media acotada.

1.2.1. El espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$.

En esta sección abordamos el estudio de el espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$. En adelante, salvo mención expresa, asumiremos que todo cubo Q de \mathbb{R}^n considerado tendrá sus aristas paralelas a los ejes. Definimos

$$f_Q = \frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx$$

donde $|Q| = \int_Q dx = l^n$ siendo l el lado del cubo Q .

Decimos que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ si existe $M \geq 0$ tal que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx \leq M$$

Definimos

$$\|f\|_* = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q| dx$$

Tenemos, en estas condiciones, que

$$f \in BMO(\mathbb{R}^n) \iff \|f\|_* < \infty$$

Además $\|\cdot\|_*$ es norma en el espacio de clases de $BMO(\mathbb{R}^n)$ con la relación de equivalencia

$$f \sim g \iff \exists \lambda \in \mathbb{C} / f = g + \lambda \text{ en c.t.p. de } \mathbb{R}^n$$

que seguiremos denotando, por comodidad, de la misma forma que antes, dándose por supuesta dicha consideración.

Proposición 1.2.1. *El espacio $(BMO(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_*)$ es un espacio de Banach.*

Definición 1.2.1. Definimos para cada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ la norma

$$\|f\|^* = \sup_Q \left\{ \inf_{\alpha \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - \alpha| dx \right\}$$

observándose que $\|f\|^* \leq \|f\|_* \leq 2\|f\|^*$ por lo que se sigue que ambas son normas equivalentes sobre el espacio $BMO(\mathbb{R}^n)$

Observación 1.2.1. El resultado es análogo en la definición anterior si en lugar de considerar cubos se consideran bolas y además ambas normas son equivalentes..

Proposición 1.2.2. *El espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ está continuamente contenido en $BMO(\mathbb{R}^n)$, es decir, la aplicación $i: L^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow BMO(\mathbb{R}^n)$ es continua. Recordamos que*

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup \text{ess } |f| = \inf \{c > 0 / |f(x)| \leq c \text{ en c.t.p de } \mathbb{R}^n\} = \\ &= \inf \{\varepsilon > 0 / |\{x \in \mathbb{R}^n / |f(x)| > \varepsilon\}| = 0\} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2.1. La función $f(x) = \log|x|$, $x \neq 0$ cumple que $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ pero $f \notin L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.2.3. Dadas $f, g \in BMO(\mathbb{R}^n)$ se tiene que:

1. $|f| \in BMO(\mathbb{R}^n)$.
2. $\max(f, g), \min(f, g) \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.2.4. Si $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^{n+1}} dx < \infty$$

Además se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f_Q|}{1 + |x|^{n+1}} dx < \infty$$

donde Q es el cubo unidad.

Observación 1.2.2. En el resultado anterior se puede cambiar $n+1$ por $n+\beta$ para $\beta \geq 1$

Definición 1.2.2 (Núcleo de Poisson para \mathbb{R}_+^{n+1}). Se define el *núcleo de Poisson* para el semiespacio $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}^n, y > 0\}$ como

$$P_y(x) = c_n \frac{y}{(y^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \quad (1.10)$$

para $x \in \mathbb{R}^n, y > 0$ donde c_n es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} P_y(x) dx = 1$ para cada $y > 0$, es decir,

$$c_n = \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dz}{(1 + |z|^2)^{\frac{n+1}{2}}}}. \quad (1.11)$$

La transformada de Poisson viene dada por

$$\mathcal{P}(f)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} P_y(x - z) f(z) dz = P_y \star f(x) \quad (1.12)$$

para $x \in \mathbb{R}^n$ e $y > 0$.

1.2.2. El espacio $BMO_p(\mathbb{R}^n)$.

Definición 1.2.3. Definimos el espacio $BMO_p(\mathbb{R}^n)$ como

$$BMO_p(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) / \|f\|_{*,p}^p < \infty\}$$

donde $\|f\|_{*,p}^p = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - f_Q|^p dx$

Claramente se tiene que $BMO_p(\mathbb{R}^n) \subset BMO(\mathbb{R}^n)$ y se prueba la inclusión contraria usándose la proposición y los teoremas que siguen.

Proposición 1.2.5. Sea f una función medible no negativa y $\alpha > 0$ y supongamos que

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) dx < \alpha$$

Entonces existe una sucesión de cubos disjuntos en Q dada por $\{Q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verificando que

$$1. \quad f(x) \leq \alpha \text{ en c.t.p de } Q \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n.$$

$$2. \quad \alpha \leq \frac{1}{|Q_n|} \int_{Q_n} f(x) dx \leq 2^n \alpha$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \leq \frac{1}{\alpha} \int_Q f(x) dx.$$

Teorema 1.2.1 (Jonh-Nirenberg). Existen dos constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$|\{x \in Q / |f(x) - f_Q| > \alpha\}| \leq C_1 |Q| e^{-C_2 \frac{\alpha}{\|f\|_*}}$$

para cada cubo Q en \mathbb{R}^n , cada $\alpha > 0$ y cada $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$.

Proposición 1.2.6. Para cada $1 < p < \infty$ existe $A_p > 0$ verificando que

$$\|f - f_Q\|_p \leq A_p \|f\|_*$$

para cada cubo Q de \mathbb{R}^n y cada $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$

Proposición 1.2.7. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces son equivalentes:

$$1. \quad f \in BMO(\mathbb{R}^n)$$

$$2. \quad \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ y > 0}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(z) - \mathcal{P}(f)(x, y)|^p P_y(x - z) dz < \infty$$

donde $P_y(x)$, c_n y $\mathcal{P}(f)(x, y)$ vienen dados por (1.10), (1.11) y (1.12) respectivamente.

En lo que sigue veremos que el operador maximal de Hardy-Littlewood aplica $BMO(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Sabemos ya que dicho operador aplica $L^p(\mathbb{R}^n)$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ y $L^1(\mathbb{R}^n)$ en $L^1_w(\mathbb{R}^n)$. Para ello necesitamos de un nuevo operador que definimos a continuación.

Definición 1.2.4. Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$f^\#(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(z) - f_Q| dz, x \in \mathbb{R}^n \quad (1.13)$$

y claramente se tiene que

$$f \in BMO(\mathbb{R}^n) \iff f^\# \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Proposición 1.2.8. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathcal{M}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces existen $C_0, C_1 > 0$ tales que

$$C_0 \|\mathcal{M}f\|_p \leq \|f^\#\|_p \leq C_1 \|\mathcal{M}f\|_p$$

donde las constantes no dependen de f

1.2.3. Espacios de Schwartz.

Decimos que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ es una función del espacio Schwartz S cuando la magnitud

$$\gamma_{m,k}(\phi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1 + |x|^2)^m \left| D^k(\phi(x)) \right|$$

es finita para cada $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^n$

Además para cada $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^n$ se tiene que $\gamma_{m,k}$ es seminorma sobre el espacio S . Este espacio vectorial topológico S es de Fréchet cuando consideramos sobre él la topología asociada a la familia $\{\gamma_{m,k}\}_{m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^n}$

Proposición 1.2.9. *Se tienen los siguientes resultados:*

1. El operador $D^k: S \rightarrow S$ es continuo para cada $k \in \mathbb{N}^n$
2. Si p es polinomio entonces la aplicación

$$T_p: S \rightarrow S, T_p(\phi) = p \cdot \phi$$

es continua.

Proposición 1.2.10 (Propiedad de los multiplicadores). *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Son equivalentes las propiedades*

1. Para cada $\phi \in S$ se cumple que $f \cdot \phi \in S$.
2. La aplicación $\Phi: S \rightarrow S$, $\Phi(\phi) = f \cdot \phi$ es continua.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}^n$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |x|^2)^{m_k}} \left| D^k \phi(x) \right| < \infty$$

Teorema 1.2.2 (Teorema del grafo cerrado). *Sea $T: S \rightarrow S$ una aplicación con el grafo cerrado, entonces T es continuo.*

Definición 1.2.5. La *transformada de Fourier* se define como

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) e^{-ixy} dy \quad (1.14)$$

para cada $x \in \mathbb{R}^n$

La *transformada inversa de Fourier* se define como

$$\mathcal{F}^{-1}(\Psi)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x) e^{ixy} dx \quad (1.15)$$

para cada $y \in \mathbb{R}^n$

Observación 1.2.3. La transformada inversa de Fourier está bien definida porque la transformada de Fourier es un automorfismo del espacio de Schwartz en sí mismo.

Definición 1.2.6. La convolución asociada a la transformada de Fourier viene definido por

$$\phi \star \Psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)\Psi(x-y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

y se trata de un operador continuo que satisface que

$$\mathcal{F}(\phi \star \Psi) = \mathcal{F}(\phi)\mathcal{F}(\Psi)$$

Proposición 1.2.11. El operador traslación definido por

$$\mathcal{T}_x\phi(y) = \phi(y-x), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

es continuo de S en sí mismo.

Definición 1.2.7 (Distribuciones temperadas). Representamos por S' , denominado *espacio de distribuciones temperadas*, al espacio de los funcionales $T: S \rightarrow \mathbb{C}$ lineales y continuos. Para cada $\phi \in S$, definimos

$$P_\phi(T) = |T(\phi)|, \quad T \in S'$$

tratándose de una seminorma sobre S' .

Llamamos topología débil-* sobre S' a aquella definida por la familia $\{P_\phi\}_{\phi \in S}$

Proposición 1.2.12. Consideremos $\phi \in S$ satisfaciendo que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Definimos para cada $t > 0$

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^n} \phi\left(\frac{x}{t}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Entonces si $T \in S'$ se tiene que

$$T \star \phi_t \rightarrow T, \quad t \rightarrow 0^+$$

en la topología débil-* de S' . Además $T \star \phi_t(\Psi) = T(\phi_t \star \Psi)$

1.2.4. El espacio $H^p(\mathbb{R}^n)$.

Sea $0 < p \leq \infty$. Una distribución (temperada) $f \in S'$ se dice que está en $H_\phi^p(\mathbb{R}^n)$ si

$$M_\phi(f)(x) = \sup_{t>0} f \star \phi_t(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

pertenece a $L^p(\mathbb{R}^n)$ donde $\phi \in S$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx \neq 0$

Proposición 1.2.13. Para $f \in S'$, $0 < p \leq \infty$ y $\phi_j \in S$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi_j(x) dx \neq 0$, $j = 1, 2$ se tiene que

$$M_{\phi_1}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n) \iff M_{\phi_2}(f) \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

En lo que sigue escribiremos $H^p(\mathbb{R}^n)$ para referirnos al espacio $H_{\phi}^p(\mathbb{R}^n)$ para $\phi \in S$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \neq 0$

Proposición 1.2.14. Para $p > 1$ se tiene que $H^p(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$

Teorema 1.2.3 (Banach-Alaouglú). Sea X espacio vectorial topológico y V un entorno de 0 en X . Entonces

$$V^0 = \{T \in X' / |T(x)| \leq 1, x \in V\}$$

es compacto en la topología débil-* de X'

Proposición 1.2.15. Sea X un espacio vectorial topológico separable y V un entorno del 0 en X . Entonces V^0 es secuencialmente débil-* compacto, es decir, de cada sucesión de V^0 puede extraerse una subsucesión débil-* convergente.

Teorema 1.2.4. Sean $0 < p \leq \infty$, $f \in S'$ y $\phi \in S$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx \neq 0$. Entonces son equivalentes las afirmaciones

1. $f \in H^p(\mathbb{R}^n)$ ($M_{\phi}f \in L^p(\mathbb{R}^n)$)
2. $M_{\phi, \nabla}(f)(x) = \sup_{|x-y|<t} |f \star \phi_t(y)|$, $x \in \mathbb{R}^n$ es una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$
3. $\mathcal{P}(f)(x) = \sup_{t>0} \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(e^{-\delta|z|^2} P_t(\cdot)(x) \right)$, $x \in \mathbb{R}^n$ es una función de $L^p(\mathbb{R}^n)$

Teorema 1.2.5. Sean $f \in S'$ y $q > 1$. Entonces son equivalentes

1. $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$
2. Existe una sucesión $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $\sum \lambda_j < \infty$ y una sucesión de q -átomos $\{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot a_j$$

con convergencia en S' .

Definición 1.2.8 (q-átomos). Decimos que una función medible a es un q -átomo cuando

1. Existe una bola B que soporta a dicha función y

$$\|a\|_q \leq \frac{1}{|B|^{1-\frac{1}{q}}} = |B|^{\frac{q}{q-1}}$$

2. $\int_B a(x) dx = 0$

Teorema 1.2.6 (Fefferman). El dual de H^1 es BMO.

Capítulo 2

Ampliación de análisis complejo.

Este curso, dividido en dos partes, aborda, en la primera, el estudio de las funciones de varias variables complejas, prestando especial atención a la propiedad de holomorfía y tópicos relacionados (tales como los conjuntos analíticos, extensión de funciones,...), y, en la segunda, las funciones armónicas así como los espacios de Hardy para el caso unidimensional.

El programa del curso se detalla a continuación:

2.1 Introducción a las funciones de varias variables complejas.

1. Funciones holomorfas en varias variables.
2. Series múltiples. Convergencia.
3. El problema $\bar{\partial}$ y el Teorema de Hartog.
4. Funciones pluriarmónicas y plurisubarmónicas.
5. Problema de Levi.

2.2 Funciones armónicas y espacios de Hardy.

1. Representación integral de algunas funciones armónicas.
2. Comportamiento de frontera.
3. Espacios de Hardy.
4. Funciones de Nevanlinna.

2.1. Introducción a las funciones de varias variables complejas.

Antes de comenzar la primera parte del curso, introduciremos una serie de consideraciones previas que nos facilitarán el desarrollo de los contenidos.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el espacio \mathbb{C}^n como el conjunto

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C} = \{z = (z_1, \dots, z_n) / z_k \in \mathbb{C}, k = 1, \dots, n\}$$

Esto nos permite establecer un difeomorfismo de cuerpos entre \mathbb{C}^n y \mathbb{R}^{2n} , utilizando el que existe entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C} . Por ejemplo,

$$\begin{aligned} i: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto z = a + bi \end{aligned}$$

Tomamos en \mathbb{C}^n la topología usual inducida por \mathbb{R}^{2n} . En ella, un conjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ se denomina **dominio** o **región** si es abierto y conexo.

Recordemos que el conjunto de las funciones derivables, con derivada continua hasta orden r y definidas en un cierto conjunto abierto Ω se denota por $\mathcal{C}^r(\Omega)$.

Algunos de los conjuntos elementales que emplearemos se detallan a continuación:

Disco unidad:

$$\Delta = \mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C} / |\xi| < 1\} \subset \mathbb{C}$$

Polidisco unidad:

$$\Delta^n = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n / |\xi_k| < 1, k = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}^n$$

Frontera del Polidisco unidad: $\partial\Delta^n$

Frontera distinguida del Polidisco unidad:

$$\partial_0\Delta^n = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n / |\xi_k| = 1; k = 1, \dots, n\} = \partial\Delta \times \cdots \times \partial\Delta = \mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$$

De forma análoga se definen los polidiscos centrados en cualquier punto de \mathbb{C}^n y cualquier radio $\varepsilon > 0$.

Polidisco de centro $a \in \mathbb{C}^n$ y radio $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$:

$$\Delta^n(a, \varepsilon) = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{C}^n / |\xi_k - a_k| < \varepsilon, k = 1, \dots, n\} \subset \mathbb{C}^n$$

Veamos algunos conceptos sobre la cohomología de Rham que utilizaremos en la sección del problema de $\bar{\partial}$.

Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definimos el espacio vectorial

$$\wedge^k(\Omega) = \{\omega = \sum \omega_{i_1 \dots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} / \omega_{i_1 \dots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\}.$$

Como consecuencia de la definición tenemos que $\wedge^0(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y que para $k > n$ se tiene que $\wedge^k(\Omega) = \{0\}$.

Sobre estos espacios vectoriales se define la diferencial exterior d que está definida como sigue:

$$\begin{aligned} d : \wedge^k(\Omega) &\longrightarrow \wedge^{k+1}(\Omega) \\ \omega = f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} &\longmapsto d\omega = df \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \end{aligned}$$

Además, cumple que $d^2 \equiv 0$. Si denotamos por $d_k : \wedge^k(\Omega) \longrightarrow \wedge^{k+1}(\Omega)$ entonces tenemos que $\text{Im}g d_k \subset \ker d_{k+1}$. Por tanto podemos definir:

$$\mathcal{H}^k(\Omega; \mathbb{R}) = \ker d_{k+1} / \text{Im}g d_k$$

como el k -ésimo grupo de Rham en Ω .

La teoría de Rham nos dice que los grupos globales de Rham no dependen de la estructura diferenciable de Ω , sino de la estructura topológica.

Observación 2.1.1. Considerando Ω un abierto conexo de \mathbb{R}^n , si $\mathcal{H}^k(\Omega; \mathbb{R}) = 0$, para toda $\omega \in \wedge^{k+1}(\Omega)$ forma cerrada ($d\omega = 0$), existe una forma $\eta \in \wedge^k(\Omega)$ que es exacta, es decir, $d\eta = \omega$.

Definición 2.1.1. Si $\mathcal{H}^k(\Omega; \mathbb{R})$ tiene dimensión finita se dice que Ω tiene *cohomología finita*. A $b_k = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}^k(\Omega; \mathbb{R})$ se denomina k -ésimo número de Betti.

De esta forma tenemos que, por ejemplo en el abierto de \mathbb{R}^4 siguiente, formado por el producto de dos anillos de \mathbb{R}^2 ,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 < x^2 + y^2 < 2\} \text{ times } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2 < x^2 + y^2 < 3\}$$

los grupos de cohomología son

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(\Omega; \mathbb{R}) &= \mathbb{R}, & b_0 &= 1 \\ \mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) &= \mathbb{R}^2, & b_1 &= 2 \\ \mathcal{H}^2(\Omega; \mathbb{R}) &= \{0\}, & b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Consideremos un abierto Ω de \mathbb{C}^n y una función $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. En \mathbb{C}^n , utilizando la estructura compleja, la diferencial exterior se descompone en $d = \partial + \bar{\partial}$. Actúa sobre una función u dando lugar a la forma diferencial du como sigue:

$$du = \partial u + \bar{\partial} u = \left(\frac{\partial u}{\partial z} dz_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial z_n} dz_n \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z}_1 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_n} d\bar{z}_n \right).$$

Denominaremos *forma de tipo* (p, q) a aquella que tiene una expresión tal que

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} + \sum_{j_1, \dots, j_q} \beta_{j_1, \dots, j_q} d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Denominamos **forma de tipo** $(p, 0)$ a aquella cuya expresión es

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$$

y forma de tipo $(0, q)$ a la que sea como sigue

$$\omega = \sum_{j_1, \dots, j_q} \beta_{j_1, \dots, j_q} d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

Esto nos permite definir sobre el abierto Ω los espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \wedge^{(p,0)}(\Omega) &= \left\{ \omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} \alpha_{i_1, \dots, i_p} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \middle/ \alpha_{i_1, \dots, i_p} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \right\} \\ \wedge^{(0,q)}(\Omega) &= \left\{ \omega = \sum_{j_1, \dots, j_q} \beta_{j_1, \dots, j_q} d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q} \middle/ \beta_{j_1, \dots, j_q} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \right\} \end{aligned}$$

Sobre cada uno de estos espacios vectoriales podemos definir los operadores diferenciales exteriores ∂ y $\bar{\partial}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial &:= \partial_{(p,0)} : \wedge^{(p,0)}(\Omega) \longrightarrow \wedge^{(p+1,0)}(\Omega) \\ \omega = f dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} &\longmapsto \partial\omega = \partial f \wedge dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \\ \bar{\partial} &:= \bar{\partial}_{(0,q)} : \wedge^{(0,q)}(\Omega) \longrightarrow \wedge^{(0,q+1)}(\Omega) \\ \omega = g d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_q} &\longmapsto \bar{\partial}\omega = \bar{\partial}g \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{i_q} \end{aligned}$$

En la estructura compleja, que la diferencial exterior compleja cumpla que $d^2 = 0$ hace que esta propiedad la hereden los operadores diferenciales ∂ y $\bar{\partial}$. Es decir, $\partial^2 = 0$ y $\bar{\partial}^2 = 0$. Además, esta condición obliga a que $\partial\bar{\partial} = -\bar{\partial}\partial$. Por tanto, podemos definir, de forma análoga al caso real, los grupos de cohomología de Rham de tipo $(p, 0)$ en Ω como

$$\mathcal{H}_{\partial}^{(p,0)}(\Omega; \mathbb{C}) := \ker \partial_{(p+1,0)} \middle/ \text{Im} \partial_{(p,0)}$$

y los grupos de cohomología de Rham de tipo $(0, q)$ en Ω como

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{(0,q)}(\Omega; \mathbb{C}) := \ker \bar{\partial}_{(0,q+1)} \middle/ \text{Im} \bar{\partial}_{(0,q)}.$$

En particular, $\mathcal{H}_{\partial}^{(0,q)}(\text{Bolas}; \mathbb{C}) = 0$ y $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{(0,q)}(\Delta(a, r); \mathbb{C}) = 0$.

2.1.1. Funciones holomorfas en varias variables.

Una vez que tenemos bien definido el espacio ambiente comencemos por definir las funciones holomorfas en \mathbb{C}^n .

Definición 2.1.2. Dado un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, decimos que una función $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, es holomorfa en Ω si es holomorfa para cada variable por separado z_i , $i = 1, \dots, n$.

Recordemos que una función, $\varphi: \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es holomorfa en el abierto Ω de \mathbb{C} si

$$\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Además esta condición es equivalente a las **Ecuaciones de Cauchy-Riemann**.

De forma más general, podemos definir,

Definición 2.1.3. Una transformación $f: \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ es holomorfa si lo es cada una de sus funciones componentes, $f_k: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, m$.

Al igual que ocurría en una variable compleja, la holomorfía se comporta bien con la composición de aplicaciones. Es decir, la composición de aplicaciones holomorfas es holomorfa. Para simplificar, el conjunto de las aplicaciones holomorfas definidas en Ω lo denotaremos por $\mathcal{O}(\Omega)$.

Tratemos de ver si las propiedades que sabemos se cumplen para funciones holomorfas en \mathbb{C} tienen cabida en \mathbb{C}^n . Por ejemplo, el **Teorema de identidad** en \mathbb{C} nos dice que *dada una función holomorfa, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, si definimos el conjunto $\mathcal{Z}_f = \{z \in \Omega \subseteq \mathbb{C} / f(z) = 0\}$ y su conjunto de puntos de acumulación, $Der(\mathcal{Z}_f)$, es distinto de vacío, entonces $f \equiv 0$ en Ω* . Como consecuencia, si la función es nula en un abierto $U \subset \Omega$ de su dominio de definición, entonces es nula en todo Ω . Este teorema también es válido para funciones armónicas en \mathbb{R}^2 . También es cierto en \mathbb{C}^n .

Teorema 2.1.1 (Teorema de identidad). *Si una función f , holomorfa en el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, es nula en un abierto $U \subset \Omega$, entonces es nula en todo el dominio Ω .*

Otros teoremas más fuertes son los siguientes

Teorema 2.1.2. *Dados un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$, una función $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ y el conjunto $\Sigma = \{z \in \Omega / \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) = \dots = \text{Im}(z_n) = 0\}$, se tiene que si $\Sigma \neq \emptyset$ y $f = 0$ en Σ , entonces $f \equiv 0$ en Ω .*

También podemos hablar de la **Fórmula integral de Cauchy** en \mathbb{C}^n siendo su demostración una reducción a la fórmula integral de Cauchy en \mathbb{C} .

Teorema 2.1.3. *Sea $f \in \mathcal{O}(\Delta^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Delta^n})$. Entonces:*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta^n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\prod_{i=1}^n (\xi_i - z_i)} d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Por una aplicación conjunta del Teorema de identidad (2.1.1) y del teorema (2.1.3) se tienen los siguientes corolarios.

Corolario 2.1.1. Sea $f \in \mathcal{O}(\Delta^n) \cap \mathcal{C}(\overline{\Delta^n})$. Si $f = 0$ en $\partial_0 \Delta^n$ entonces $f \equiv 0$ en Δ^n .

Corolario 2.1.2. Sean Ω un dominio de \mathbb{C}^n y $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si existen $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$ de forma que $f = 0$ en $\partial_0 \Delta^n(a, \varepsilon) \subset \Omega$ entonces $f \equiv 0$ en Ω .

2.1.2. Series múltiples. Convergencia.

Si consideramos $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ y $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ podemos definir

$$z^k := z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}.$$

Definición 2.1.4. Se denomina *serie múltiple* a la expresión del tipo $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ en la que $z \in \mathbb{C}^n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_n \in \mathbb{C}$.

Definición 2.1.5. Decimos que la *serie converge en un punto* $z_0 \in \mathbb{C}^n$ si la suma es finita, es decir, $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z_0^n < \infty$.

De esta forma, con una simple aplicación de la suma de la serie armónica, para $z \in \Delta^n$ escribimos el desarrollo en potencias

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n (\xi_i - z_i)} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \frac{z^k}{\xi^{k+1}}.$$

Reescribimos así la fórmula de Cauchy de la siguiente manera.

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta^n} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_n)}{\prod_{i=1}^n (\xi_i - z_i)} d\xi_1 \cdots d\xi_n = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta^n} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} \right) z^k = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} a_k z^k$$

Tratemos de dar condiciones en los que una serie múltiple es convergente. Dada una serie de potencias $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$, si sus términos son todos positivos ($a_\alpha \geq 0$) entonces la serie converge en el polidisco unidad cuando

$$\sup_{\substack{\Gamma \subset \mathbb{N}^n \\ \Gamma \text{ finito}}} \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha \leq C < \infty.$$

Esta acotación también es equivalente tomando los conjuntos $\Gamma_M = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid |\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| \leq M\}$, con lo que la serie converge si

$$\sup_M \left\{ \sum_{|\alpha| \leq M} a_\alpha \right\} \leq C < \infty.$$

En una variable teníamos bien definido el mayor conjunto de convergencia de la serie de potencias, un disco. En varias variables no hay un equivalente. Los dominios de convergencia maximales cambian. Veamos algunos ejemplos en \mathbb{C}^2 .

Ejemplo 2.1.1. La serie $\sum_{n,k=0}^{\infty} z^k w^n$ converge en Δ^2 .

Ejemplo 2.1.2. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ converge en $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < 1\}$.

Ejemplo 2.1.3. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} (z \cdot w)^k$ converge en $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| \cdot |w| < 1\}$.

Definamos el conjunto de convergencia en \mathbb{C}^n .

Definición 2.1.6. Dada la serie de potencias $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$, decimos que el *conjunto de convergencia* de la serie múltiple es:

$$\mathcal{C} := \left\{ z_0 \in \mathbb{C}^n / \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_{\alpha} z_0^{\alpha}| \text{ converge para todo } z \in U_{z_0} \right\}$$

siendo U_{z_0} un abierto que contiene a z_0 . Para cada $z_0 \in \mathcal{C}$ se dice que la serie múltiple *converge absolutamente en* z_0 .

Que una serie múltiple sea absolutamente convergente en un punto z_0 nos lleva a que sea convergente en z_0 , pero no necesariamente a la inversa. También, puede ocurrir que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z_0^{\alpha} < \infty$ para algún z_0 , pero $\mathcal{C} = \emptyset$. Por ejemplo, $\sum_{k \in \mathbb{N}^n} k! z^k$ converge en $z_0 = 0$ y $\mathcal{C} = \emptyset$.

Definición 2.1.7. Dada la serie de potencias $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$ decimos que *converge normalmente en* Ω o *converge uniformemente sobre compactos* K de Ω si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ de forma que para todo $z \in K$ se tiene que

$$\left| \sum_{|\alpha| \geq n_0} a_{\alpha} z^{\alpha} \right| < \varepsilon.$$

Definición 2.1.8. Llamamos *conjunto de acotación* de una serie múltiple a:

$$\mathcal{A} := \{z \in \mathbb{C}^n / \exists M > 0 : |a_{\alpha} z^{\alpha}| \leq M, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\}$$

Observación 2.1.2. Es fácil ver que $\mathcal{C} \subset \overset{\circ}{\mathcal{A}}$, donde $\overset{\circ}{\mathcal{A}}$ representa el abierto de \mathcal{A} .

Proposición 2.1.1 (Lema de Abel.). Si $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$ converge absolutamente para un z_0 fijo, entonces la serie converge en el conjunto

$$\mathcal{D}_{z_0} = \{z \in \mathbb{C}^n / |z_k| < |z_{0k}|, k = 1, \dots, n\}.$$

Observación 2.1.3. En el Lema de Abel, si z_0 satisface que $z_{0k} = 0$, para algún k , entonces $\mathcal{D}_{z_0} = \emptyset$.

Corolario 2.1.3. Sea la serie múltiple $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$. Consideremos un $w = (w_1, \dots, w_n)$, cuyas componentes son no nulas, $w_i \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, de forma que exista un compacto $K \subset \mathcal{D}_w$. Entonces $\mathcal{C} = \overset{\circ}{\mathcal{A}}$.

Definición 2.1.9. Dado un $X \subset \mathbb{C}^n$ decimos que es **Reinhardt** cuando para todo $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$ y $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}$ se tiene que $(z_1 \cdot e^{i\theta_1}, \dots, z_n \cdot e^{i\theta_n}) \in X$.

Definición 2.1.10. Dado un $X \subset \mathbb{C}^n$ decimos que es **modularmente decreciente** cuando para todo $z = (z_1, \dots, z_n) \in X$, $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}$ y $r \leq 1$ se tiene que $(r \cdot z_1 \cdot e^{i\theta_1}, \dots, r \cdot z_n \cdot e^{i\theta_n}) \in X$.

Definición 2.1.11. Dado un $X \subset \mathbb{C}^n$ decimos que es **Completo de Reinhardt** cuando es un dominio modularmente decreciente.

Proposición 2.1.2. Si X es un de Reinhardt entonces se tiene que $z \in X$ si, y sólo si, $(|z_1|, \dots, |z_n|) \in X$.

Observación 2.1.4. El conjunto

$$\widehat{X} = \{(|z_1|, \dots, |z_n|) / z \in X\} \subseteq \mathbb{R}_+^n$$

determina al dominio de Reinhardt X .

Definición 2.1.12. Decimos que un conjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}_+^n$ es **logarítmicamente convexo** si el conjunto

$$\log \mathcal{R} = \{(\log x_1, \dots, \log x_n) / x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}\}$$

es un conjunto convexo, es decir, para todo $t \in [0, 1]$ se cumple que

$$t \cdot \log \mathcal{R} + (1 - t) \cdot \log \mathcal{R} \subseteq \log \mathcal{R}.$$

Observación 2.1.5. En particular, diremos que un conjunto $X \subset \mathbb{C}^n$ Reinhardt es logarítmicamente convexo si \widehat{X} es logarítmicamente convexo.

Ejemplo 2.1.4. $X = \Delta^2$ es Reinhardt completo logarítmicamente convexo.

Ejemplo 2.1.5. La **Figura de Hartog**

$$\mathcal{H} = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < \frac{1}{2}, |w| < 1 \right\} \cup \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < 1, \frac{1}{2} < |w| \right\}$$

es un abierto Reinhardt no completo ni logarítmicamente convexo.

Ejemplo 2.1.6. $\Omega = \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < \frac{1}{2}, w < 1 \right\} \cup \left\{ (z, w) \in \mathbb{C}^2 / |z| < 1, |w| < \frac{1}{2} \right\}$ es completo Reinhardt no logarítmicamente convexo.

Proposición 2.1.3. Sea $\mathcal{C} \neq \emptyset$ el conjunto de convergencia de la serie múltiple $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$. Si $0 \in \mathcal{C}$ entonces es Reinhardt completo logarítmicamente convexo.

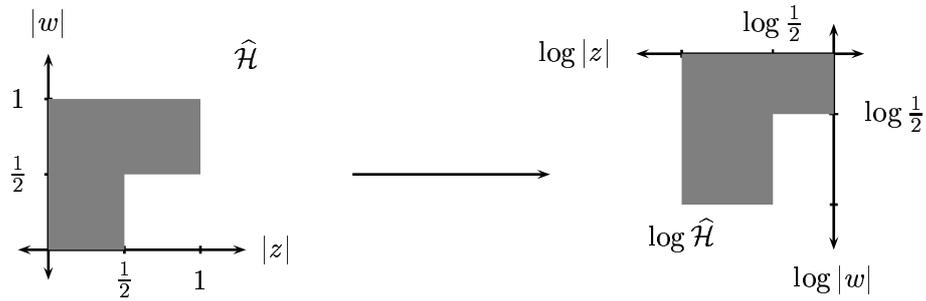


Figura 2.1: La Figura de Hartog no es logarítmicamente convexa.

Para demostrar esta proposición recurrimos a que $\mathcal{C} = \overset{\circ}{\mathcal{A}}$ en el que es más sencillo de comprobar que cumple todas las propiedades.

Con estas nuevas definiciones estamos construyendo el mayor dominio de convergencia de una serie múltiple.

Teorema 2.1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio Reinhardt de modo que el $0 \in \Omega$. Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces la serie múltiple*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha} = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial_0 \Delta^n} \frac{f(\xi)}{\xi^{k+1}} \right) z^k$$

converge uniformemente en compactos sobre Ω a la función f .

Veamos como esta construcción del conjunto de convergencia maximal nos devuelve el mismo resultado si retornamos a una variable compleja.

Corolario 2.1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región Reinhardt. Entonces existe $r > 0$ de forma que $\Omega = \Delta(0, r)$.*

Corolario 2.1.5. *Sea $\Omega \in \mathbb{C}^n$ una región Reinhardt. Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces existe una función \tilde{f} que es holomorfa en el conjunto $\tilde{\Omega} = \text{convex}(\Omega) = \overset{\circ}{\bigcap} D$, en donde D son completos Reinhardt logarítmicamente convexos que contienen a Ω . Además, $\tilde{f}|_{\Omega} = f$.*

Ejemplo 2.1.7. Toda función holomorfa en la Figura de Hartog (2.1.5), \mathcal{H} se puede extender al polidisco completo.

Teorema 2.1.5. *Sea $\Omega \in \mathbb{C}^n$ es Reinhardt de forma que el $0 \in \Omega$. Supongamos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Entonces existe una, y solo una serie múltiple de potencias de forma que $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_{\alpha} z^{\alpha}$ con convergencia normal en Ω .*

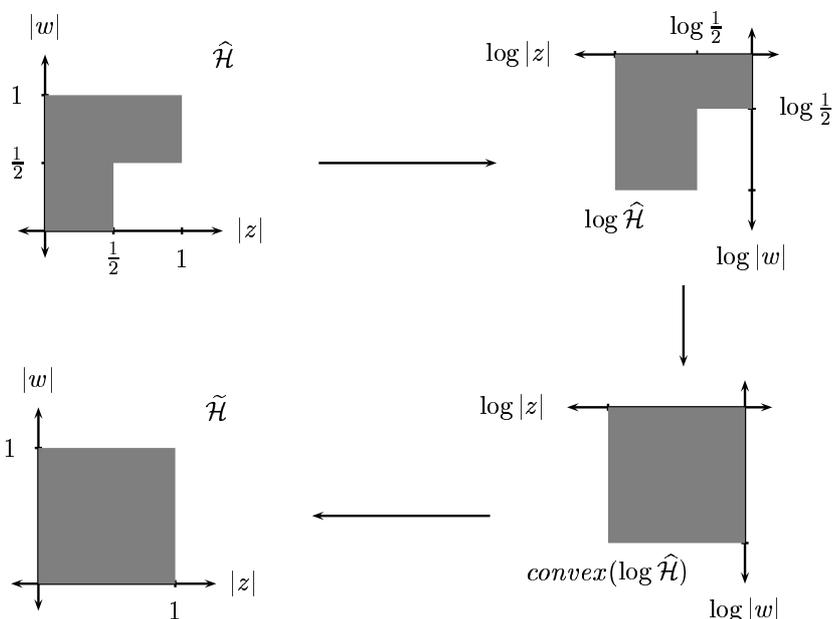


Figura 2.2: Demostración visual de la extensión de una función holomorfa en la figura de Hartog.

2.1.3. El problema de $\bar{\partial}$ y el Teorema de Hartog.

El problema de $\bar{\partial}$ consiste en buscar una solución de la ecuación en derivadas parciales $\bar{\partial}u = f$. Comencemos por resolver el problema en una variable.

Teorema 2.1.6. *Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{C} . Supongamos que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y está acotada. Entonces*

$$u(z) := -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dA_{\xi} \quad (2.1)$$

verifica que $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y $\bar{\partial}u = f$ en Ω .

Una consecuencia del teorema es la que sigue.

Corolario 2.1.6. *Sea Ω un dominio de \mathbb{C} . Supongamos que $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$. Entonces $\bar{\partial}u = f$ tiene en Ω una solución $u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.*

En general, dada $f \in \mathcal{C}_c^1(\Omega)$, $\bar{\partial}u = f$ no admite soluciones en las que $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{C})^1$. Bastaría aplicar el teorema de Stokes.

Planteemos ahora el problema de $\bar{\partial}$ en \mathbb{C}^n . Dado un abierto Ω de \mathbb{C}^n buscamos, en principio, una función $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ que resuelva la ecuación $\bar{\partial}u = \omega$ en la que $\omega = f_1 d\bar{z}_1 + \dots + f_n d\bar{z}_n \in \wedge^{(0,1)}$. Es decir debemos encontrar una función u de forma que

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_i} = f_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

¹ \mathcal{C}_c representa las funciones continuas de soporte compacto.

Además se han de cumplir ciertas condiciones de integrabilidad, $\bar{\partial}\omega = 0$, que nos devuelven $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ restricciones:

$$\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \quad k, j = 1, \dots, n, \quad k \neq j.$$

Veamos una serie de resultados que devuelven la solución del problema, pero que no se pueden utilizar en \mathbb{C} .

Teorema 2.1.7. *Sea $n > 1$. Consideremos $w \in \Lambda_c^{(0,1)}(\mathbb{C}^n)$ de clase \mathcal{C}^1 y $\bar{\partial}$ -cerrada, es decir, $\bar{\partial}\omega = 0$. Sea Ω_0 una componente conexa no acotada de $\mathbb{C}^n \setminus \text{sop}\omega$.² Entonces existe una función $u \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{C}^n)$ que es solución de la ecuación $\bar{\partial}\omega = u$ en \mathbb{C}^n . Además $u \equiv 0$ en Ω_0*

Pero este teorema se concreta más en el siguiente, uno de los más importantes del curso. Vemos reflejada su importancia en las consecuencias que conlleva.

Teorema 2.1.8 (Teorema de Hartog.). *Sea Ω un dominio de \mathbb{C}^n , para $n > 1$. Sea $K \subseteq \Omega$ compacto de forma que $\Omega \setminus K$ es conexo. Entonces toda función $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K)$ extiende a una función holomorfa en Ω .*

Consecuencias del teorema de Hartog:

1. Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n . Si $f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{a\})$ entonces f extiende holomórficamente en $z = a$, es decir, no existen singularidades aisladas.
2. El conjunto de ceros de una función holomorfa no tiene puntos aislados.
3. Sea Ω subconjunto abierto de \mathbb{C}^n y sea $\mathcal{Z}_f = \{z \in \Omega / f(z) = 0\}$ el conjunto de ceros de f . Si Ω es acotado, entonces para cualquier $V \in \text{Ent}(\partial\Omega)$ se tiene que $\mathcal{Z}_f \cap V \neq \emptyset$.

Otra versión del Teorema de Hartog es la que siguiente:

Teorema 2.1.9. Teorema de Hartog. *Sea f definida en Ω un subconjunto abierto de \mathbb{C}^n . Supongamos que, para cada $k = 1, \dots, n$, la función*

$$\xi \mapsto f(z_1, \dots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \dots, z_n)$$

es holomorfa como función de ξ , para z_j fijo, $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n$. Entonces f es holomorfa como función de \mathbb{C}^n .

Observación 2.1.6. Este resultado no ocurre en el caso real. Por ejemplo, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es \mathcal{C}^∞ en cada variable por separado, considerando la otra fija, y sin embargo $f \notin \mathcal{C}^\infty$.

²En este caso estamos hablando de una $(0, 1)$ -forma con soporte compacto. El soporte de la forma ω se representa por $\text{sop}\omega$

Proposición 2.1.4. Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de forma que para y fijo, es un polinomio en x y, para x fijo, es un polinomio en y , entonces f es un polinomio en dos variables.

En la demostración del teorema de Hartog (2.1.9) se emplean los siguientes lemas:

Lema 2.1.1. Sea $f: \Delta(0, r) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $|f| \leq M$ entonces $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n} M$.

Lema 2.1.2. Sea $f: \Delta(0, r_1) \times \cdots \times \Delta(0, r_n) \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa con $|f| \leq M$ entonces $|\partial^\alpha f(0)| \leq \frac{\alpha!}{r^\alpha} M$.

Lema 2.1.3. Sea f una función en las condiciones del Teorema de Hartog (2.1.9). Si $\overline{D} \subset \Omega$ es un polidisco cerrado, entonces existen $D'_j \subset D_j$, para $j < n$ y $D'_n = D_n$ de forma que f está acotada en $D' = D'_1 \times \cdots \times D'_n$.

Lema 2.1.4. Sean $D = \{z \in \mathbb{C}^n / |z_j - z_j^0| < R, j = 1, \dots, n\}$ y $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa en $D' = \{z = (z_1, \dots, z_n) / |z_j - z_j^0| < r, |z_n - z_n^0| < R\}$. Además, si $z' \rightarrow f(z', z_n)$ es holomorfa para $z' \in \{z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) / |z_j - z_j^0| < r, j = 1, \dots, n-1\}$. con z_n fijo, entonces $f \in \mathcal{O}(D)$.

2.1.4. Funciones pluriarmónicas y plurisubarmónicas.

Antes de comenzar recordemos la definición de una función armónica y subarmónica en \mathbb{C} .

Definición 2.1.13. Una función $v: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ continua se dice *armónica* en Ω si para cada $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que, se tiene que

$$v(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + r e^{i\theta}) d\theta \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) se conoce como *Propiedad del valor medio*.

Definición 2.1.14. Una función $v: \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ se dice subarmónica en Ω si:

1. v es semicontinua superiormente, es decir, $\limsup_{x \rightarrow a} v(x) \leq v(a)$.
2. v satisface la subpropiedad del valor medio, es decir,

$$v(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(a + r e^{i\theta}) d\theta \quad (2.3)$$

Observación 2.1.7. El que v sea una función semicontinua superiormente implica que se pueda ver como límite puntual de funciones continuas, $v = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k$, siendo $v \leq g_{k+1} \leq g_k$. Además, las funciones subarmónicas, al igual que las armónicas, también cumplen el *Principio de máximo*.

Definición 2.1.15. Diremos que una función v es *superarmónica* si $-v$ es subarmónica.

Teorema 2.1.10 (Teorema de Hartog.). Sea $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones subarmónicas en un dominio Ω uniformemente acotadas superiormente en subconjuntos compactos en Ω , es decir, para todo compacto $K \subset \subset \Omega$, existe una constante $M = M(K) > 0$ de forma que $v_j \leq M$ en K . Si $\limsup_{j \rightarrow \infty} v_j(\xi) \leq C$ para todo $\xi \in \Omega$, para cada compacto $K \subset \Omega$ y $\varepsilon > 0$ existe $j_0 = j_0(K)$ de forma que

$$v_j(\xi) \leq C + \varepsilon, \text{ para } j \geq j_0, \xi \in K.$$

Veamos qué tipo de funciones representa el papel de funciones armónicas en una variable.

Sea $f = u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$, donde $u, v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Para $n = 1$ si $u = \operatorname{Re} f$, entonces $\Delta u = 0$ siendo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y considerando $z = x + iy$. Sin embargo, para $n > 1$, si $z = (z_1, \dots, z_n)$ con $z_j = x_j + iy_j$, tenemos que,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i \frac{\partial f}{\partial y_j} \right) = 0 \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Sustituyendo f por su expresión $u + iv$ y derivando,

$$\begin{cases} u_{x_j} = v_{y_j} \\ u_{y_j} = -v_{x_j} \end{cases} \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Derivando la primera respecto x_j y la segunda respecto y_j y sumando obtenemos las ecuaciones

$$u_{x_j x_j} + v_{y_j y_j} = 0, \text{ para } j = 1, \dots, n.$$

Si por el contrario, derivamos la primera respecto x_k y la segunda respecto y_k y sumando se cumple que

$$u_{x_j x_k} + u_{y_j y_k} = 0, \text{ para } k, j = 1, \dots, n.$$

Ahora bien, ¿cuántas de estas ecuaciones son suficientes para que u sea la parte real de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$?

Partiendo de la idea de que $f = u + iv$ tenemos que $2u = f + \bar{f}$. De esta forma, $2\bar{\partial}u = \bar{\partial}\bar{f}$, con lo que $2\partial\bar{\partial}u = \partial\bar{\partial}\bar{f} = \bar{\partial}f$. Esto se debe a que f es holomorfa, es decir, $\bar{\partial}f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j = 0$. Así, aplicando las propiedades de ∂ y $\bar{\partial}$ se tiene que:

$$2\partial\bar{\partial}u = \partial\bar{\partial}\bar{f} = -\bar{\partial}\partial\bar{f} = -\bar{\partial}\bar{\partial}f = 0.$$

Esto nos lleva a que también se han de cumplir estas $\frac{n(n+1)}{2}$ ecuaciones:

$$\partial\bar{\partial}u = \sum_{\substack{k < j \\ k, j=1}}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k = 0.$$

Obsérvese que en el caso de una variable tenemos que:

$$\partial\bar{\partial}u \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4} \Delta u.$$

Definición 2.1.16. Diremos que una función u es **pluriarmónica** en $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ si cumple que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y, en Ω ,

$$\partial\bar{\partial}u = \sum_{k,j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k = 0.$$

Observación 2.1.8. Definamos $B_{jk}u = \partial\bar{\partial}u = \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}$. Se cumple que $\overline{B_{jk}} = B_{kj}$. Esto significa que la matriz $B = (B_{jk}u)_{j,k}$ que tiene como elementos cada una de las derivadas parciales de segundo orden de u , es una matriz autoadjunta.

Que una función sea pluriarmónica conlleva que sea armónica en sentido real, pero el recíproco no es cierto a no ser que estemos en \mathbb{C} , en el que armónica y pluriarmónica representan lo mismo. Sin embargo, una relación entre las definiciones de armónica y pluriarmónica es que una función es pluriarmónica si la restricción a cada línea compleja sobre su dominio de definición es una función armónica.

Teorema 2.1.11. *En caso de que $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) = 0$:*

- a) *Si Ω es un dominio o una región de \mathbb{C}^n y u es pluriarmónica en Ω , entonces existe una función $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ de forma que $u = \operatorname{Re} f$.*
- b) *Cuando $\Omega \subset \mathbb{C}$ entonces $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) = 0$ si, y sólo si, Ω es simplemente conexo.*

Que $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) = 0$ significa que para toda 1-forma cerrada ω , la ecuación $du = \omega$ admite solución en Ω .

Teorema 2.1.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Supongamos que en Ω toda función pluriarmónica es la parte real de una función holomorfa. Si $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{(0,1)}(\Omega; \mathbb{C}) = 0$ entonces $\mathcal{H}^1(\Omega; \mathbb{R}) = 0$.*

En el caso de que $n = 1$, la condición $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{(0,1)}(\Omega; \mathbb{C}) = 0$ siempre se cumple, es decir, la ecuación $\bar{\partial}u = f$ tiene solución en Ω .

2.1.5. Problema de Levi.

Comencemos esta parte hablando de los dominios de holomorfa.

Definición 2.1.17. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ una región.

- Diremos que $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ es **singular** en $p \in \partial\Omega$ si para toda $u \in \operatorname{Ent}(p)$ no existe una función $h \in \mathcal{O}(U)$ de forma que $h \equiv f$ en alguna componente de $U \cap \Omega$.

- Ω es un **dominio de holomorfía** si para todo $p \in \partial\Omega$ existe una función $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ que es singular en p .

Ejemplo 2.1.8. La figura de Hartog no es un dominio de holomorfía.

Ejemplo 2.1.9. $B(0, 2) \setminus \bar{B}(0, 1)$ no es un dominio de holomorfía.

Ejemplo 2.1.10. Para $n = 1$ todo dominio es de holomorfía.

Ejemplo 2.1.11. El producto de dominios de holomorfía es un dominio de holomorfía.

Proposición 2.1.5. Si Ω es un dominio convexo en \mathbb{C}^n entonces es un dominio de holomorfía.

En la demostración de esta proposición sólo debemos aplicar el Teorema de Hanh-Banach que me garantiza que para cualquier punto de la frontera puedo definir un operador lineal que me separa p del dominio.

Veamos una primera aproximación al problema de Levi. Consideremos en \mathbb{R}^n un dominio convexo Ω que lo podamos definir como $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n / \rho(x) < 0\}$ donde $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y $\nabla\rho \neq 0$ si $\rho = 0$. Estas condiciones se piden para garantizar la suavidad de la frontera del dominio. En este caso, la convexidad del dominio lo hereda la función que define la frontera, es decir, ρ . Además, $Hess(\rho; p) \geq 0$ siempre que $p \in \partial\Omega$.

Pensemos ahora en \mathbb{C}^n . Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n / \rho(x) < 0\}$ donde $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{C}^n)$. Sea $p \in \partial\Omega$ de forma que $\rho(p) = 0$. Si desarrollamos la función ρ en torno al punto p con la estructura compleja nos quedan dos formas cuadráticas:

$$Q_p(\rho) \cdot h = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k}(p) h_j \cdot h_k$$

$$L_p(\rho) \cdot h = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) h_j \cdot \bar{h}_k$$

De esta forma tenemos que $\langle Hess(\rho; p) \cdot h, h \rangle = 2Re(Q_p(\rho)h) + L_p(\rho)h$.

Definición 2.1.18. Se denomina **Forma de Levi** a $L_p(\rho)$.

Definición 2.1.19. Denotaremos el **espacio tangente complejo** por

$$T_p^{\mathbb{C}}(\Omega) = \{h \in T_p(\Omega) / ih \in T_p(\Omega)\} = T_p(\Omega) \cap (iT_p(\Omega))$$

Proposición 2.1.6. Si $h \in T_p^{\mathbb{C}}(\Omega)$ siendo Ω convexo, entonces $L_p(\rho) \cdot h \geq 0$.

El recíproco de este resultado no es cierto.

Definición 2.1.20. Un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ se dice **Levi pseudoconvexo** cuando su forma de levi asociada es no negativa. En caso de que sea positiva, diremos que es **Levi pseudoconvexo estricto**.

Teorema 2.1.13. Problema de Levi. $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía con frontera suave si, y solo si, Ω es Levi pseudoconvexo.

El primero en resolver este problema fue Oka en \mathbb{C}^2 .

Definición 2.1.21. Un dominio Ω se dice **pseudoconvexo** cuando existe una sucesión $\{\Omega_n\}$ de dominios Levi pseudoconvexos estrictos de forma que

$$\Omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n.$$

Teorema 2.1.14. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces son equivalentes:

- a) Ω es un dominio de holomorfía.
- b) Ω es pseudoconvexo.
- c) $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{(0,k)}(\Omega; \mathbb{C}) = 0$ para $k = 1, \dots, n$.

2.2. Funciones armónicas y espacios de Hardy.

En esta parte del curso de doctorado nos dedicamos a trabajar con funciones armónicas u definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ que cumplen que

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\partial\bar{\partial}u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}} = 0.$$

2.2.1. Representación integral de algunas funciones armónicas.

Centraremos nuestra atención en la búsqueda de distintas representaciones integrales de las funciones armónicas. Para ello, distinguiremos los espacios en los que encontramos la función que nos da la representación integral de la función armónica.

Teorema 2.2.1. Sea $p > 1$, y u una función armónica en el disco de radio $R > 1$, $D(0, R)$. Supongamos que

$$\sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta = C < \infty.$$

Entonces existe $F \in L^p(\partial D(0, R))$ tal que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt,$$

donde

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + z}{1 - z} \right)$$

se conoce como **Núcleo de Poisson** y cumple que $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) d\theta = 2\pi$.

Cuando $p = 1$ las cosas funcionan esencialmente igual sin más que considerar que $L^\infty = (L^1)^*$. Resulta, el siguiente teorema.

Teorema 2.2.2. *Si u es armónica acotada en el disco unidad $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ entonces existe una función $F \in L^\infty$ tal que*

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(t) dt.$$

En particular, si tratamos de generalizar este resultado para $p = 1$ nos encontramos con un problema con el espacio dual de L^1 . Sin embargo, $\mathcal{C}(\mathbb{T})^* = \mathcal{M}(\mathbb{T})$. Es decir, $d\mu(t) = f(t)dt$ de forma que $\|\mu\| = \|f\|_1$.

Teorema 2.2.3. *Sea u una función armónica en el disco unidad \mathbb{D} y supongamos que las medidas de orden 1 cumplen que*

$$\sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r e^{i\theta})| d\theta = C < \infty.$$

Entonces existe una medida de Borel finita sobre \mathbb{T} de forma que

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Corolario 2.2.1 (Evans). *Si u es armónica y positiva en \mathbb{T} entonces existe una medida positiva y finita μ tal que*

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t).$$

Hasta ahora tenemos que

$$u(r e^{i\theta}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt, & 1 < p \leq \infty \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t), & p = 1 \end{cases}$$

Nuestro objetivo es conectar $F(t)$ con μ .

Teorema 2.2.4. *Sea $p \geq 1$ y $F = F(t) \in L^p$. Entonces*

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt$$

es una función armónica en \mathbb{D} que cumple

$$\sup_{r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} |u(r e^{i\theta})|^p d\theta = \|F\|_p.$$

Teorema 2.2.5. *Sea $f \in L^p$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces*

$$u(r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt \xrightarrow{\|\cdot\|_p} F(e^{i\theta}) \text{ cuando } r \rightarrow 1.$$

Teorema 2.2.6 (Teorema de Fatou.). Sea $F \in L^1(\partial\mathbb{D})$, de forma que

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) F(e^{it}) dt.$$

Entonces $u(z) \rightarrow F(e^{i\theta})$, cuando $z \rightarrow e^{i\theta}$ no tangencialmente.

Hemos visto que una función armónica u en el disco unidad, bajo ciertas condiciones, sabemos que podemos encontrar una función $F \in \mathcal{O}(D(0,1))$, cuyo desarrollo en serie viene dado por $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, de forma que $u(re^{i\theta}) = \operatorname{Re} F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|}$, donde

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{2} \bar{a}_{-n}, & n < 0 \\ \operatorname{Re} a_0, & n = 0 \\ \frac{1}{2} a_n, & n > 0, \end{cases}$$

Hemos encontrado la parte real de la función holomorfa que define a u . Busquemos la parte imaginaria de dicha función.

Definición 2.2.1. La función *conjugada armónica* de una función armónica u viene dada por la función \tilde{u} tal que:

i) $\tilde{u}(0) = 0$.

ii) \tilde{u} es armónica.

iii) $F(z) = u(z) + i\tilde{u}(z)$ es holomorfa.

Además, su representación es de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{u}(re^{i\theta}) &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \cdot \operatorname{sig}(n) A_n r^{|n|} e^{in\theta} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(- \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \cdot \operatorname{sig}(n) r^{|n|} e^{in(\theta-t)} \right) d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t) d\mu(t). \end{aligned}$$

La función $Q_r(\theta)$ se denomina *Núcleo de Poisson conjugado*. También se puede expresar como

$$Q_r(\theta) = \frac{2r \operatorname{sen} \theta}{1 + r^2 - 2r \cos \theta} = \operatorname{Im} \left(\frac{1+z}{1-z} \right).$$

Observación 2.2.1. Veamos la relación que existe entre los Núcleos de Poisson.

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} = P_r(\theta) + iQ_r(\theta).$$

Definición 2.2.2. Dada $F \in L^1(\mathbb{T})$ se dice que θ es *punto de Lebesgue* de F si cumple

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{-h}^h |F(\theta + t) - F(\theta)| dt = 0.$$

Proposición 2.2.1. En todo punto θ de Lebesgue de F , la armónica conjugada \tilde{u} tiende al valor principal de la función holomorfa F , es decir, $\tilde{u}(re^{i\theta}) \rightarrow v_p: \tilde{F}(\theta)$, cuando $r \rightarrow 1$. Además $\tilde{F}(\theta)$ es medible en el borde.

Teorema 2.2.7 (Teorema de Riesz.). Para $1 < p < \infty$ consideremos el operador conjugación de L^p en L^p , que asocia a f , obtenida de la función armónica, con su conjugada \tilde{f} , obtenida de la función armónica conjugada. Se cumple que

$$\|\tilde{f}\|_p \leq c\|f\|_p.$$

En otra palabras, estamos diciendo que dicho operador es continuo en L^p .

Observación 2.2.2. En general, cuando buscamos la armónica conjugada de una función u armónica en el disco unidad \mathbb{D} tenemos que

- Si $u \in L^p$, para $1 < p < \infty$, entonces $\tilde{u} \in L^p$
- Si $u \in L^\infty$, entonces $\tilde{u} \in BMO$.

2.2.2. Espacios de Hardy.

Representaremos el conjunto de las funciones holomorfas en el disco unidad \mathbb{D} por

$$H(\mathbb{D}) = \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} / f \in \mathcal{O}(\mathbb{D})\}.$$

Definición 2.2.3. Para toda función $f \in H(\mathbb{D})$ y $0 \leq r < 1$ se define

- la *media de orden p de f a nivel r* , para $1 < p < \infty$, como

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (2.4)$$

- la *media infinita de f a nivel r* como

$$M_\infty(r, f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|. \quad (2.5)$$

Definición 2.2.4. En el disco unidad definimos:

- *Espacio de las funciones holomorfas acotadas* como el conjunto

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) / f \text{ acotada}\}. \quad (2.6)$$

- **Espacio de Hardy holomorfo de orden p** , para $0 < p < \infty$, como el conjunto

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f \in H(\mathbb{D}) / \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) = cte < \infty\}. \quad (2.7)$$

Observación 2.2.3. La primera consecuencia, es que toda función f del espacio las funciones holomorfas acotadas (2.6) cumple $M_\infty(r, f) < \|f\|_\infty$ para cualquier nivel r . En el caso particular de $p = 2$, por la desigualdad de Parseval, se tiene que $f \in H^2(\mathbb{D})$ si, y sólo si, $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ con $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, es decir, $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$.

Lema 2.2.1. Sea $0 < p < \infty$. Consideremos $f \in H^p(\mathbb{D})$. Entonces

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{1}{p}} \frac{\|f\|_p}{(1-r)^{\frac{1}{p}}}.$$

Sea, para cada $0 < p < \infty$, el conjunto

$$\mathcal{H}^p = \{f = f(e^{i\theta}) \in L^p : f \in H^p\}.$$

Es distinto de vacío pues la función $\sum_{k=1}^n a_k e^{ik\theta} \in \mathcal{H}^p$ pues son los valores frontera de $\sum_{k=1}^n a_k z^k$.

Teorema 2.2.8. \mathcal{H}^p es la clausura en L^p de los polinomios.

Teorema 2.2.9. Sea $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k \in H^1$ y consideremos $f(e^{i\theta}) \in L^1$ sus valores de frontera. Sean c_n los coeficientes de Fourier f definidos como

$$c_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(t) dt.$$

$$\text{Entonces, } c_n = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ a_n, & n \geq 0. \end{cases}$$

De la misma forma que hemos definido el Espacio de Hardy con funciones holomorfas, podemos hacerlo con funciones armónicas. Representaremos el conjunto de las funciones armónicas en el disco unidad por

$$h(\mathbb{D}) = \{f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es armónica}\}.$$

Definición 2.2.5. En el disco unidad denominamos

- **Espacio de las funciones armónicas acotadas** al conjunto

$$h^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in h(\mathbb{D}) / f \text{ acotada}\}. \quad (2.8)$$

- **Espacio de Hardy armónico de orden p** , para $0 < p < \infty$, al conjunto

$$h^p(\mathbb{D}) = \{f \in h(\mathbb{D}) / \sup_{0 \leq r < 1} M_p(r, f) = cte < \infty\}. \quad (2.9)$$

Si $u \in h^1(\mathbb{D})$ se tiene que

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t),$$

siendo μ una función de variación acotada en $[0, 2\pi]$. Es decir, cumple que

$$\sup_{P \in \mathcal{P}([0, 2\pi])} \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty,$$

donde $P = \{0 = t_0 < \dots < t_n = 2\pi\}$ es una partición finita del intervalo $[0, 2\pi]$. Esta representación se denomina la **representación integral de Poisson-Stieltjes**.

Teorema 2.2.10. *Las tres clases de funciones armónicas siguientes son equivalentes:*

- i) *Las que admiten representación integral de Poisson-Stieltjes.*
- ii) *Las que pueden expresarse como diferencia de funciones armónicas positivas.*
- iii) *Las que están en h^1 .*

La implicación **iii**) \Rightarrow **i**) se debe al siguiente lema.

Lema 2.2.2 (Lema de Helly). *Sea $\{\mu_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variaciones uniformemente acotadas en $[a, b]$. Entonces existe una subsucesión $\{\mu_{n_k}(t)\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en todo punto a una función de variación acotada en el intervalo $[a, b]$. Además, si $\varphi \in \mathcal{C}([a, b])$ entonces*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi(t) d\mu_{n_k}(t) = \int_a^b \varphi(t) d\mu(t).$$

Definición 2.2.6. Dada una función de variación acotada μ en $[a, b]$, se define la **derivada simétrica** en el punto θ_0 como

$$D\mu(\theta_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mu(\theta_0 + t) - \mu(\theta_0 - t)}{2t}.$$

Teorema 2.2.11. *Sea u armónica con representación integral de Poisson-Stieltjes de una función μ de variación acotada en $[a, b]$. Si μ tiene derivada simétrica en θ_0 entonces*

$$\lim_{r \rightarrow 1} u\left(re^{i\theta_0}\right) = D\mu(\theta_0).$$

Teorema 2.2.12. *Sea $f \in H^\infty(\mathbb{D})$, entonces f tiene límite radial en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. Además, si $L = \lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\theta_0})$, entonces el límite no tangencial de f también vale L en θ_0 .*

Lema 2.2.3. *Para g subarmónica en \mathbb{D} definimos la función*

$$m(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g\left(re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Entonces $m(r)$ es creciente y convexa de $\log r$.

Teorema 2.2.13. Teorema de convexidad de Hardy. Para $0 < p \leq \infty$ y $f \in H(\mathbb{D})$ tenemos que

- (a) $M_p(r, f)$ es creciente en $[0, 1)$.
- (b) $\log M_p(r, f)$ es convexa de $\log r$.

Veamos a continuación la idea de subordinación que se plasmará en el siguiente teorema. Sean $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y $F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ univalente de forma que $f(0) = F(0) = 0$ y $f(\mathbb{D}) \subset F(\mathbb{D})$. Entonces tenemos una función $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ de forma que $\varphi(z) = F^{-1} \circ f(z)$, con $\varphi(0) = 0$. Aplicando el Lema de Schwartz a φ nos encontramos con que $|\varphi(z)| = |z|$ con $|z| < 1$. Dado que $f(z) = f \circ \varphi(z)$ se sigue que $f(D(0, r)) \subset F(D(0, r))$, pues fijado $|z| < r$ se infiere que $|\varphi(z)| \leq |z| < r$.

Definición 2.2.7. Dada $f, F: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas. Decimos que f *está subordinada a* F , ($f \propto F$), si existe una $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorfa que satisfaga para $z \in \mathbb{D}$:

- $|\varphi(z)| < |z|$.
- $f(z) = F(\varphi(z))$.

Teorema 2.2.14 (Teorema de Subordinación de Littlewood.). Sean $f, F \in H^\infty(\mathbb{D})$, de forma que $f \propto F$. Para $0 < p \leq \infty$ se tiene que

$$M_p(r, f) \leq M_p(r, F).$$

Observación 2.2.4. Una función f de $H^\infty(\mathbb{D})$ tiene límites radiales no tangenciales finitos en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$. Además, para $0 < p < q < \infty$ se tiene que

$$H^\infty \subset H^q \subset H^p.$$

2.2.3. Funciones de Nevanlinna.

Definición 2.2.8. Dada una función $f \in H(\mathbb{D})$ se dice de *característica acotada o de Nevanlinna* cuando:

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq C = \text{cte.}$$

En conjunto de funciones de Nevanlinna se representa por \mathcal{N} . Una consecuencia fundamental es que $H^p \subset \mathcal{N}$.

Veamos las propiedades que tiene este nuevo conjunto de funciones.

Teorema 2.2.15 (Teorema de Nevanlinna.). Para $f \in H(\mathbb{D})$ se tiene que $f \in \mathcal{N}$ si, y sólo si, existen $\varphi, \psi \in H^\infty(\mathbb{D})$, con $\|\varphi\|_\infty, \|\psi\|_\infty < 1$, de forma que $f = \frac{\varphi}{\psi}$.

Teorema 2.2.16. Si $f \in \mathcal{N}$, entonces

- i) f tiene límite no tangencial en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.
- ii) $\log |f(re^{i\theta})| \in L^1([0, 2\pi])$, salvo que $f \equiv 0$.
- iii) si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces $f \in L^p([0, 2\pi])$.

Teorema 2.2.17 (Conjunto de ceros.). Sea $f \in H(\mathbb{D})$ no idénticamente nula y sean $\{z_n\}_{n \geq 1}$ los ceros de f contados tantas veces como indiquen sus multiplicidades. Entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta < \infty \quad \iff \quad \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$$

Corolario 2.2.2. Si $f \in \mathcal{N}$ entonces cumple que $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < \infty$.

Teorema 2.2.18. Sean $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{D}$ de forma que

- i) $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots \leq |a_n| \leq \dots \leq 1$.
- ii) **Condición de Blaschke.**

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty. \quad (2.10)$$

Entonces la función

$$\mathcal{B}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n} \quad (2.11)$$

converge uniformemente en compactos, es decir, $\mathcal{B} \in H(\mathbb{D})$. Además

- $|\mathcal{B}(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}$.
- Los ceros de \mathcal{B} son exactamente $\{a_n\}_{n \geq 1}$ contados tantas veces como se repitan.
- $|\mathcal{B}(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.

En general, la función (2.11) se denomina **Producto de Blaschke** siempre que verifique la Condición de Blaschke (2.10).

Teorema 2.2.19 (Teorema de factorización de Riesz.). Toda $f \in H^p(\mathbb{D})$, para algún $p > 0$, se puede factorizar para cada $z \in \mathbb{D}$ como

$$f(z) = \mathcal{B}(z) \cdot g(z)$$

donde \mathcal{B} es un producto de Blaschke y $g \in H^p(\mathbb{D})$ sin ceros en \mathbb{D} . Además,

- $|f(e^{i\theta})| = |g(e^{i\theta})|$ en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.

- $|f(re^{i\theta})| \leq |g(re^{i\theta})|$ para $r < 1$.

Observación 2.2.5. Esta descomposición es válida para funciones de la clase de Nevanlinna.

Teorema 2.2.20. Dada $f \in H^p(\mathbb{D})$ para algún $p > 0$, se cumple que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi}.$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

Corolario 2.2.3. Si $f \in H^p$ para algún $p > 0$, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} \left| \log^+ |f(re^{i\theta})| - \log^+ |f(e^{i\theta})| \right|^p \frac{d\theta}{2\pi} = 0.$$

En la demostración se usa el siguiente lema.

Lema 2.2.4. Dados dos números reales $a, b \geq 0$ y $0 < p < 1$, se tiene que

$$|\log^+ a - \log^+ b| \leq \frac{1}{p} |a - b|^p.$$

Teorema 2.2.21. Sea $f \in H^p(\mathbb{D})$ donde $p > 0$, entonces

$$\log |f(re^{i\theta})| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \log |f(e^{it})| dt.$$

Definición 2.2.9. Una **función exterior** de $H^p(\mathbb{D})$ es una función de la forma:

$$F(z) = e^{i\gamma} \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \psi(t) dt \right],$$

donde $\psi(t) \in L^p$ y $\log \psi \in L^1$.

Definición 2.2.10. Una **función interior** de $H^p(\mathbb{D})$ es una función que cumple

- $\|f\|_\infty \leq 1$ en \mathbb{D} .
- $|f(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto de $\partial\mathbb{D}$.

Teorema 2.2.22 (Teorema de Factorización.). Dada una función $f \in H^p(\mathbb{D})$ no nula y consideremos $p > 0$. Existe una constante γ , un producto de Blaschke \mathcal{B} , una función exterior, F , y una función interior singular S de forma que:

$$f(z) = e^{i\gamma} \mathcal{B}(z) \cdot S(z) \cdot F(z).$$

El recíproco también es cierto.

Teorema 2.2.23. Sea $f \in H(\mathbb{D})$. Entonces existe $\varphi \in L^1([0, 2\pi])$ de forma que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) \varphi(e^{it}) dt$$

si, y sólo si, $f \in H^1(\mathbb{D})$.

Capítulo 3

Ampliación de análisis funcional.

Este curso, dividido en dos partes, aborda en su primera parte el estudio del espacio de distribuciones, y en su segunda parte, el estudio de las álgebras de Banach y la transformación de Gelfand.

El programa del curso se detalla a continuación:

3.1. El espacio de las distribuciones de Schwartz.

3.1.1. Introducción.

3.1.2. El espacio de distribuciones \mathcal{D}' .

3.1.3. Convergencia en \mathcal{D}' .

3.1.4. Operaciones en \mathcal{D}' .

3.1.5. Derivación en \mathcal{D}' .

3.1.6. Producto tensorial de distribuciones. Convolución.

3.2. Álgebras de Banach.

3.2.1. Álgebras de Banach.

3.2.2. Teoría espectral en álgebras de Banach.

3.2.3. Ideales y homomorfismos.

3.2.4. Aplicaciones.

3.2.5. La transformación de Gelfand.

3.1. El espacio de distribuciones de Schwartz.

3.1.1. Introducción.

El objeto que motiva este curso de doctorado es el estudio del espacio de distribuciones y algunas de sus propiedades más importantes así como la aportación que realiza tal espacio a la teoría de soluciones débiles de una EDP. Empezaremos diciendo que en el campo de las soluciones regulares, la caracterización se debe a Cauchy-Goursat en 1898 exigiendo que los coeficientes de la EDP sean analíticos. El primero en proponer soluciones al problema de las soluciones débiles fue Euler convirtiendo la EDP en una ecuación integral despreciando los puntos conflictivos (no aportan a la integral, tienen medida nula) y construyendo una sucesión de funciones regulares que convergen en algún sentido a la condición inicial para resolver el problema de valores iniciales con cada una de estas funciones regulares y obtener así una sucesión de funciones $\{u_n(x, t)\}_{n \in \mathbb{N}}$. La conjetura de Euler era que

$$u_n(x, t) \longrightarrow u(x, t), \quad n \rightarrow \infty$$

Más tarde aparece Lagrange (1760) que en la dirección de Euler obtiene resultados interesantes pero involucrando a condiciones físicas como que los extremos de la solución de la ecuación de ondas sean puntos fijos en el tiempo.

Veamos la evolución en el tiempo de las exigencias para la existencia de soluciones de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x, t) = -4\pi\rho(x, y, z)$$

1. POISSON (1813), $\rho \equiv cte$
2. GAUSS (1840), $\rho \in C^1$
3. HÖLDER (1882), $|\rho(x) - \rho_0(x)| < A|x|^n$ con $\rho = \rho(|x|)$
4. MORERA, $\int_0^{|x|} (\rho(r) - \rho_0(r)) \frac{dr}{r} < \infty$
5. BÔCHER (1905), postula que: $\Delta u = 0$ en $\Omega \iff \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$
6. KOEBE (1906), prueba que: $u \in C^2, \Delta u = 0$ en $\Omega \iff u \in C^1, \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$
7. RIEMMAN (1854), dada una función f desarrollada en serie trigonométricas de Fourier, construye $F(x)$ integrando dos veces la representación de f obteniendo una función que satisface que $D^2 F(x) = f(x)$ donde

$$D^2 F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+2h) + F(x-2h) - 2F(x)}{4h^2}$$

8. WIENER (1926), afirma que para que $Lu \equiv 0$ sin que $u \in C^2$ cuando ocurre que

$$\iint_{\Lambda} u(x, y) \tilde{g}(x, y) dx dy = 0$$

siendo $Lu \equiv A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu$, para cierta familia de funciones siendo Λ una poligonal.

9. SOBOLEV (1936), introduce el concepto de funcional.
10. L.SCHWARTZ (1950), sistematiza el concepto de funcional dando a luz a la teoría de distribuciones.

Observación 3.1.1. Dirac en su obra “Principles of quantum mechanics” (1930) necesitaba un ente matemático que satisficiera que $\delta(x) = 0, x \neq 0$ y $\delta(0) = \infty$ (condiciones contradictorias en la teoría de integración) que lo llamo función impropia. Dió la idea intuitiva de la “delta de Dirac”.

3.1.2. El espacio de distribuciones \mathcal{D}' .

Lo primero es definir el espacio de funciones prueba (testing function space)

$$\mathcal{D} = \{ \varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} / \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge \varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus K} \equiv 0, \forall K^{cpt} \subset \mathbb{R}^n \}$$

Ejemplo 3.1.1. Dos ejemplos de funciones de \mathcal{D} son

$$\zeta(t) = \begin{cases} 0 & , |t| \geq 1 \\ e^{\frac{1}{t^2-1}} & , |t| < 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad \gamma_\alpha(t) = \frac{\zeta(\frac{t}{\alpha})}{\int_{-\infty}^{\infty} \zeta(\frac{t}{\alpha}) dt}, \alpha > 0$$

Además $\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\alpha(t) dt = 1$

Lema 3.1.1. Dada $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ existe $\varphi \in \mathcal{D}$ tal que $f \equiv \varphi$ en $I = [a, b]$. Además si $f(t) \neq 0, t \in [a, b]$ entonces podemos aproximar uniformemente a f por una sucesión de funciones prueba vía la convolución.

$$\varphi_\alpha(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \gamma_\alpha(t - \tau) d\tau$$

3.1.3. Convergencia en \mathcal{D}' .

Definición 3.1.1 (Convergencia en \mathcal{D}). Dada una sucesión $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$, decimos que *converge a 0 en \mathcal{D}* cuando

1. $\varphi(t) = 0, \forall t \notin I'$
2. $\{\varphi_n^k(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 para $k \in \mathbb{N}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Se dirá que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge a φ en \mathcal{D}** cuando $\{\varphi_n - \varphi\}_{n \in \mathbb{N}}$ converja a 0 en \mathcal{D} y $\text{sop } \varphi \subset I$.

Definición 3.1.2 (Distribuciones. Distribuciones regulares.). Se define el espacio de las distribuciones como

$$\mathcal{D}' = \{\Phi: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C} / \Phi \text{ funcional lineal y continuo}\}$$

Aquellas distribuciones de \mathcal{D}' que admiten una representación integral de la forma

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\varphi(t)dt, \varphi \in \mathcal{D} \quad (3.1)$$

se denominan **distribuciones regulares**.

Ejemplo 3.1.2. Veamos unos ejemplos aclaratorios.

1. Toda $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ define una distribución regular de la forma dada en (3.1)
2. La distribución delta de Dirac dada por

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \varphi \in \mathcal{D}$$

no es regular porque tomando $\varphi(t) = \zeta(\frac{t}{a})$ se observa que si fuera regular sería contradictorio el hecho de que $\langle f, \varphi \rangle = \frac{1}{e}, \forall a$ y $\langle f, \varphi \rangle \longrightarrow 0, a \rightarrow 0$

Lema 3.1.2. Dadas $f, g \in C(\mathbb{R})$ satisfaciendo que $\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}$ se tiene que $f \equiv g$

Definición 3.1.3 (Convergencia en \mathcal{D}'). Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ una sucesión de distribuciones regulares. Se dice que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** si la sucesión numérica $\{\langle f_n, \varphi \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en sentido ordinario para cada $\varphi \in \mathcal{D}$. Definimos el funcional

$$f: \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}, \langle f, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, \varphi \rangle$$

Teorema 3.1.1 (Brodski.). Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ converge en \mathcal{D}' , entonces el funcional definido como antes es una distribución. Por esta razón \mathcal{D}' es cerrado frente a la convergencia.

Definición 3.1.4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en \mathcal{D}' cuando la sucesión de las sumas parciales $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ converge en \mathcal{D}'

Teorema 3.1.2. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge en \mathcal{D}' para $f_n \in \mathcal{D}'$ entonces $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{D}'$

Teorema 3.1.3. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables sobre \mathbb{R}^n que satisfacen:

1. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{|t| < T} |f_n(t)| dt \leq K$
2. $f_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ uniformemente en cualquier conjunto acotado de la forma $0 < \tau \leq |t| \leq \frac{1}{2}$ para τ suficientemente pequeño.
3. Para cada $\tau > 0$ se tiene que

$$\int_{|t| \leq \tau} f_n(t) dt \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

Entonces la sucesión de distribuciones regulares definida por la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en \mathcal{D}' a la distribución delta de Dirac.

Conviene destacar la diferencia entre convergencia funcional y convergencia distribucional encontrándose ejemplos en los que no existe el límite funcional pero sí distribucional y viceversa o que el límite funcional exista y el distribucional también pero no sea regular.

3.1.4. Operaciones en \mathcal{D}'

Definimos las operaciones elementales como sigue:.

Igualdad. Dadas $f, g \in \mathcal{D}'$ decimos que $f = g$ en $\Omega^{abto} \subset \mathbb{R}^n$ cuando

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle g, \varphi \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}' : \text{sop } \varphi \subset \Omega$$

Anulador. Dada $f \in \mathcal{D}'$ decimos que f se anula en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuando $f = 0$ en Ω .

Denotaremos por $N(f)$ al conjunto anulador que es de la forma $N(f) = \cup \Omega_j$.

Soporte. Definimos el soporte de $f \in \mathcal{D}'$ como el conjunto $\text{sop } f = \mathbb{R}^n \setminus N(f)$.

Suma y producto por escalar. Dadas $f, g \in \mathcal{D}'$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ definimos la suma y el producto por escalar como

$$\begin{aligned} \langle f + g, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle + \langle g, \varphi \rangle \\ \langle \lambda f, \varphi \rangle &= \lambda \langle f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}$. Claramente son funcionales lineales continuos por serlo f y g .

Traslación. Para $f \in \mathcal{D}'$ y $t, \tau \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\langle f(t - \tau), \varphi(t) \rangle := \langle f(t), \varphi(t + \tau) \rangle, \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

que se denotará por $\langle T_\tau f, \varphi \rangle = \langle f, T_\tau \varphi \rangle$

Trasposición. Para $f \in \mathcal{D}'$ definimos la trasposición por $\text{Trans } f := \langle f, T_0 \varphi \rangle$.

Paridad. Para $f \in \mathcal{D}'$ decimos que f es par cuando $f(t) = f(-t)$ en \mathcal{D}' . Análogamente, decimos que f es impar cuando $f(-t) = -f(t)$ en \mathcal{D}' .

Cambio de escala. Para $f \in \mathcal{D}'$ definimos la distribución de f sometida a un cambio de escala como

$$\langle f(at), \varphi(t) \rangle = \left\langle f(t), \frac{1}{|a|^n} \varphi\left(\frac{t}{a}\right) \right\rangle$$

para cada $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y cada $\varphi \in \mathcal{D}$.

Producto de distribuciones. Dada $f \in \mathcal{D}'$ y $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ el producto definido por

$$\langle \Psi f, \varphi \rangle = \langle f, \Psi \varphi \rangle$$

es lineal y acotado, por tanto $\Psi \cdot f \in \mathcal{D}'$

En general, el producto de distribuciones no es distribución. Para

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}}$$

claramente se tiene que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (por lo que $f \in \mathcal{D}'_{reg}$) mientras que $f^2 = f \cdot f$ no.

3.1.5. Derivación en \mathcal{D}' .

Dada $f \in \mathcal{D}'$, estamos interesados en definir su derivada, $\langle f', \varphi \rangle$. Haciendo integración por partes, como el soporte de φ se supone acotado, resulta una expresión que justifica la definición que sigue.

Definición 3.1.5. En las condiciones anteriores definimos la *derivada del funcional* $f \in \mathcal{D}'$ como

$$\langle f', \varphi \rangle = \langle f, -\varphi' \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}'$$

que es un funcional lineal y acotado por lo que la operación derivación es cerrada en \mathcal{D}'

En varias variables supongamos $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos la derivada parcial respecto a la i -ésima componente como

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial t_i}, \varphi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{\partial \varphi}{\partial t_i} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}'$$

mientras que

$$\left\langle D^k f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, (-1)^{|k|} D^k \varphi \right\rangle, \quad k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}^m$$

donde $|k| = k_1 + \dots + k_m$ y $D^k f = \frac{\partial^{(k)} f}{\partial t_1^{k_1} \dots \partial t_n^{k_n}}$ Además, en sentido distribucional, se puede variar el orden en la derivación sin que altere el resultado obtenido debido a que las derivadas se cargan sobre la función prueba y en ella se satisface el teorema de Schwartz de la igualdad de derivadas cruzadas, al ser de clase C^∞

Ejemplo 3.1.3. Dos ejemplos clásicos.

1. Se comprueba que las derivadas sucesivas de la delta de Dirac vienen dadas por

$$\langle \delta^n, \varphi \rangle = \langle \delta, (-1)^n \varphi^n \rangle = (-1)^n \varphi^n(0), \quad n \in \mathbb{N}$$

2. La función de Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ \frac{1}{2} & , \quad t = 0 \\ 1 & , \quad t > 0 \end{cases}$$

tiene su derivada dada por

$$\langle H', \varphi \rangle = \langle H, -\varphi' \rangle = \dots = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

Teorema 3.1.4. Dada una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'$ convergente a $f \in \mathcal{D}'$ entonces

$$D^k f_n \longrightarrow D^k f, \quad n \rightarrow \infty$$

Corolario 3.1.1. Supongamos $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ en \mathcal{D}' , entonces

$$D^k f = D^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n = \sum_{n=0}^{\infty} D^k f_n$$

Observación 3.1.2. Para apreciar la diferencia entre la derivada funcional y distribucional veamos en un caso concreto la relación entre ellas. Supongamos que f es continua y derivable en $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Consideremos $s_i = S(f; a_i)$ el salto de f en a_i y supongamos que $s_i < \infty$, $i = 1, \dots, n$. Denotaremos por $f'(x)$ a la derivada distribucional, y por $[f'(x)]$, a la derivada funcional. Se cumple que

$$f'(x) = [f'(x)] + \sum_{k=1}^n s_k \cdot \delta(x - a_k)$$

Ejemplo 3.1.4. Para ilustrar la nota anterior consideremos

$$f(x) = \begin{cases} -(x+2)^2 & , \quad x \leq -2 \\ x^2 + 2 & , \quad -2 < x < 3 \\ x - 3 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Su derivada viene dada por $f'(x) = [f'(x)] + 6 \cdot \delta(x+2) - 11 \cdot \delta(x-3)$ siendo

$$[f'(x)] = \begin{cases} -2(x+2) & , \quad x < -2 \\ 2x & , \quad -2 < x < 3 \\ 1 & , \quad x > 3 \end{cases}$$

En el resto hasta el final del apartado, estamos interesados en definir y caracterizar las primitivas de distribuciones. Como para $g \in \mathcal{D}'$, se tiene que $\langle g', \varphi \rangle = \langle g, -\varphi' \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$, parece admisible tomarla como definición de primitiva distribucional

$$\langle f^{(-1)}, \varphi' \rangle = \langle f, -\varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}$$

pero debemos hacer la restricción del dominio de aplicación dado que no toda función de C^∞ admite primitiva en dicha clase.

Definición 3.1.6. Se define **primitiva** de $f \in \mathcal{D}'$, denotada por $f^{(-1)}$, como

$$\langle f^{(-1)}, \chi \rangle = \langle f, -\Psi \rangle, \chi \in \mathcal{K}$$

donde $\Psi(t) = \int_{-\infty}^t \chi(x) dx$ y $\mathcal{K} = \{\Psi = \varphi' / \varphi \in \mathcal{D}\}$

Teorema 3.1.5. Sea $\varphi_0 \in \mathcal{D}$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(t) dt = 1$ (obviamente $\varphi_0 \notin \mathcal{K}$). Entonces para cada $\varphi \in \mathcal{D}$ se tiene que

$$\varphi = k \cdot \varphi_0 + \chi$$

donde $k = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt$ y $\chi \in \mathcal{K}$.

Definición 3.1.7. Dada $f \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, en virtud del teorema anterior,

$$\varphi = \varphi_0 + k \cdot \chi \text{ para ciertas } \varphi_0 \in \mathcal{D}, \chi \in \mathcal{K}$$

Definimos una **primitiva de f** como

$$\langle f^{(-1)}, \varphi \rangle := k \langle f^{(-1)}, \varphi_0 \rangle + \langle f^{(-1)}, \chi \rangle = k \langle f^{(-1)}, \varphi_0 \rangle + \langle f, -\Psi \rangle$$

donde $\Psi(t) = \int_{-\infty}^t \chi(x) dx$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ Haciendo las cuentas, si $f \in \mathcal{D}'$ y $f_1^{(-1)}, f_2^{(-1)}$ primitivas en \mathcal{D}' de f obtenemos que

$$\langle f_1^{(-1)} - f_2^{(-1)}, \varphi \rangle = \langle c, \varphi \rangle, \varphi \in \mathcal{D}$$

por lo que $f_1^{(-1)} - f_2^{(-1)} = c$ en \mathcal{D}' .

Observación 3.1.3. Se deduce de la definición anterior que toda distribución sobre \mathbb{R} tiene infinitas primitivas que vienen dadas como antes y que difieren entre ellas una constante.

3.1.6. Producto tensorial de distribuciones. Convolución

3.1.6.1 Producto tensorial de distribuciones.

Consideremos $f \in \mathcal{D}'_t$ y $g \in \mathcal{D}'_\tau$ donde el subíndice indica la variable de la que depende la función prueba (pueden ser vectoriales). Estamos interesados en definir un producto tensorial de distribuciones.

Definición 3.1.8. En las condiciones de antes se define el producto tensorial de distribuciones como

$$\langle f(t) \otimes g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle = \langle f(t), \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}'_{t,\tau}$$

Teorema 3.1.6. $f(t) \otimes g(\tau) \in \mathcal{D}'_{t,\tau}$ para cada $f = f(t) \in \mathcal{D}'_t$, $g = g(\tau) \in \mathcal{D}'_\tau$. Además, si el sop $f = \Omega_f$ y sop $g = \Omega_g$, entonces sop $f \otimes g = \Omega_f \times \Omega_g$.

Teorema 3.1.7. El espacio de funciones prueba de la forma

$$\left\{ \varphi(t, \tau) = \sum_{n=1}^N \Psi_n(t) \Phi_n(\tau) \mid \Psi_n \in \mathcal{D}_t, \Phi_n \in \mathcal{D}_\tau, n \in \mathbb{N} \right\}$$

es un conjunto denso en $\mathcal{D}_{t,\tau}$

• Propiedades del producto tensorial de distribuciones.

En esta sección se estudiaron las propiedades básicas del producto tensorial de distribuciones, a saber: conmutativa y asociativa. Se omiten las demostraciones por ser sencillas aunque se enuncia un teorema que se usa en ellas además de los anteriores.

Teorema 3.1.8. Sean $\varphi \in \mathcal{D}'_{t,\tau}$ y $g \in \mathcal{D}'_t$, entonces se tiene que

$$\int_a^b \langle g(\tau), \varphi(t, \tau) \rangle dt = \left\langle g(\tau), \int_a^b \varphi(t, \tau) dt \right\rangle$$

3.1.6.2 Convolución de distribuciones.

En lo que sigue estamos interesados en definir una convolución además de estudiar las condiciones en las que tiene sentido tal definición.

Considerando la definición de convolución clásica para funciones $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$f \star g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

observamos que, pensando en f y g como distribuciones, no se puede generalizar pues no se garantiza que el producto de distribuciones es una distribución.

Definición 3.1.9. Definimos la *convolución* de $f, g \in \mathcal{D}'$ como

$$\langle f \star g, \varphi \rangle = \langle f(t) \otimes g(\tau), \varphi(t + \tau) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}$$

pero existen inconvenientes dado que el *sop* $\varphi(t + \tau)$ es no acotado (es una banda, $a \leq t + \tau \leq b$) por lo que definimos $\Omega = \text{sop } f \otimes g \cap \text{sop } \varphi(t + \tau)$, que sería acotado si lo es *sop* $f \otimes g$ y consideramos las funciones prueba $\varphi(t + \tau)|_U \in \mathcal{D}'$ donde U es cierto entorno de Ω .

Teorema 3.1.9. *Dadas $f, g \in \mathcal{D}'$, suponiendo que $f \star g$ está definida como antes, se tiene que $f \star g$ es una distribución cuando*

1. *f o g tienen soporte acotado.*
2. *f y g tienen soportes acotados por la izquierda, es decir,*

$$\exists T_1 \in \mathbb{R} : \forall t < T_1, f(t) = g(t) = 0$$

que se denota por $f, g \in \mathcal{D}'_R$

3. *f y g tienen soportes acotados por la derecha, es decir,*

$$\exists T_2 \in \mathbb{R} : \forall t > T_2, f(t) = g(t) = 0$$

que se denota por $f, g \in \mathcal{D}'_L$

• **Propiedades de la convolución de distribuciones.**

Conmutativa. $\forall f, g \in \mathcal{D}'$

$$f \star g = g \star f$$

Linealidad. $\forall f, g, h \in \mathcal{D}'$ y $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$f \star (\alpha g + \beta h) = \alpha f \star g + \beta f \star h$$

Soporte. *sop* $f \star g \subset \Omega_f + \Omega_g$

3.2. Álgebras de Banach.

3.2.1. Álgebras de Banach.

Asumiremos, en adelante, que todo espacio vectorial que se considere será sobre el cuerpo de los números complejos.

Definición 3.2.1. Un *álgebra compleja* es un espacio vectorial complejo, A , donde está definida una multiplicación que satisface

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \quad (3.2)$$

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z \quad (3.3)$$

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad (3.4)$$

$$\alpha \cdot (x \cdot y) = x \cdot (\alpha \cdot y) \quad (3.5)$$

para elementos $x, y \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$.

Si además tenemos una norma definida en A que la convierta en espacio de Banach y satisfaga que

$$\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$$

entonces se dice que A es álgebra de Banach, que será conmutativa si la multiplicación lo es. Cuando existe un elemento $e \in A$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e$ para cada $x \in A$, el álgebra es unitaria con elemento neutro e .

Ejemplo 3.2.1. Algunas álgebras de Banach clásicas se enuncian a continuación:

- A). \mathbb{C} es un álgebra de Banach unitaria y conmutativa compleja donde la norma viene dada por $|z| = \sqrt{Re^2z + Im^2z}$ y el producto es el producto usual complejo.
- B). Para K compacto y Hausdorff el conjunto $C(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ continua}\}$ es un álgebra de Banach compleja unitaria conmutativa con la norma y el producto como siguen

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \sup\{|f(z)| / z \in K\} \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x), \quad x \in K \end{aligned}$$

- C). El espacio de Banach $L^1(\mathbb{R}^n)$ es un álgebra de Banach compleja unitaria y conmutativa con la convolución como producto.

3.2.2. Teoría espectral en Álgebras de Banach

En lo que sigue, salvo mención expresa, cuando se considere un álgebra conmutativa A se supondrá unitaria. Denotaremos por G al conjunto de elementos inversibles de A .

Definición 3.2.2. Dado $x \in A$, definimos el **espectro** de x por

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} / x - \lambda e \notin G\}$$

Teorema 3.2.1. Si $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$ entonces $e + x \in G$ y además

$$(e + x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\|(e + x)^{-1} - e + x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

Teorema 3.2.2. Si $x \in G$ tal que $\|x^{-1}\| < \frac{1}{\alpha}$ y $h \in A$ con $\|h\| = \beta < \alpha$ entonces

$$1. \quad x + h \in G$$

$$2. \quad \|(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}$$

Corolario 3.2.1. G es un abierto de A y la aplicación “elemento inverso” dada por $\Phi: G \rightarrow G$, $\Phi(x) = x^{-1}$ es un homeomorfismo diferenciable de G con diferencial dada por el operador lineal

$$\Lambda(h) = -x^{-1} \cdot h \cdot x$$

Corolario 3.2.2. Para todo $x \in A$ se satisface que $\sigma(x)$ es compacto y no vacío, tal que $|\lambda| \leq \|x\|$, $\forall x \in \sigma(x)$

Teorema 3.2.3. Sea $\Phi: X \rightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal acotado en A y consideremos $x \in A$. Si definimos

$$f(\lambda) = \Phi[(x - \lambda e)^{-1}], \quad \lambda \notin \sigma(x)$$

entonces f es holomorfa en $\sigma(x)^c$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda) = 0$

Teorema 3.2.4 (Gelfand-Mazur). Si A es un álgebra de Banach unitaria satisfaciendo que $A \setminus \{0\} = G$ entonces A es isométricamente isomorfo a \mathbb{C} .

Definición 3.2.3. Dado $x \in A$, llamamos **radio espectral** de x al radio del menor disco centrado en el origen que contenga a $\sigma(x)$.

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| / \lambda \in \sigma(x)\}$$

Como $\sigma(x)$ es compacto podemos tomar máximo en lugar de supremo.

Teorema 3.2.5. Para cada $x \in A$ se satisface que

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|^{\frac{1}{n}}$$

Observación 3.2.1. La cantidad $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x\|^{\frac{1}{n}}$ es topológica pero sirve para cuantificar elementos propios de la estructura de espacios de Banach a partir de los espectros puntuales.

Una propiedad importante es que si A es subálgebra de B entonces se tiene que $\sigma_A(x) \subset \sigma_B(x)$

3.2.3. Ideales y homomorfismos.

Es este apartado estudiaremos las propiedades de los ideales y homomorfismos de las álgebras de Banach. Consideremos A un álgebra de Banach unitaria y conmutativa.

Definición 3.2.4. Dado $I \subset A$ decimos que es un *ideal* cuando

1. $I \leq A$ (I es subespacio vectorial de A).
2. $\forall x \in A, \forall y \in I \Rightarrow x \cdot y \in I$

Además decimos que I es *maximal* cuando todo ideal J que verifique que $I \subset J$ entonces $J = A$. El conjunto de los ideales que no son el total y el vacío se denominan *ideales propios*.

Definición 3.2.5. Consideremos A y B dos álgebras complejas y sea $\varphi: A \rightarrow B$ una aplicación. Decimos que φ es un *homomorfismo* cuando

1. φ es lineal.
2. $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Teorema 3.2.6. Si A es un álgebra conmutativa y unitaria, entonces todo ideal propio de A está contenido en un ideal maximal. Además si A es de Banach, entonces todo ideal maximal es cerrado.

Definición 3.2.6. Dado I subespacio vectorial de A definimos la r.b.e.

$$x \sim y \iff x - y \in I$$

La clase de $x \in A$ viene dada por $\varphi(x) = x + I$ con $\varphi: A \rightarrow A/I$ aplicación lineal y sobreyectiva que se denomina proyección donde

$$A/I = \{\varphi(x) / x \in A\}$$

es el conjunto cociente que es espacio vectorial con las operaciones

$$\begin{aligned}\varphi(x + y) &= \varphi(x) + \varphi(y) \\ \varphi(\lambda \cdot x) &= \lambda \cdot \varphi(x)\end{aligned}$$

que no dependen del representante elegido. Si además A es álgebra conmutativa e I es ideal propio A , entonces se sigue que A/I es álgebra conmutativa con el producto

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

En este caso φ es homomorfismo de álgebras donde $I = \text{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(0)$

Observación 3.2.2. Si A es unitaria con elemento neutro e entonces $\varphi(e)$ es el neutro de A/I

Teorema 3.2.7. A/I es cuerpo $\iff I$ es maximal.

Teorema 3.2.8. Consideremos A álgebra de Banach y J un subespacio vectorial cerrado de A . Definimos

$$\|\varphi(x)\| = \inf\{\|x + y\| \mid y \in J\}$$

que dota al cociente A/J de la estructura de álgebra de Banach.

Definición 3.2.7. Denotaremos por \mathcal{M} al conjunto de homomorfismos complejos $h: A \rightarrow \mathbb{C}$ no nulos de un álgebra dada A .

Teorema 3.2.9. Se tienen las siguientes propiedades:

1. Cada ideal maximal de A es el núcleo de un elemento de \mathcal{M} .
2. $\lambda \in \sigma(x) \iff h(x) = \lambda$ para cierto $h \in \mathcal{M}$
3. $x \in G \iff h(x) \neq 0, \forall h \in \mathcal{M}$.
4. $h(x) \in \sigma(x), \forall x \in A, \forall h \in \mathcal{M}$
5. $|h(x)| \leq \rho(x) \leq \|x\|, \forall x \in A, \forall h \in \mathcal{M}$

3.2.4. Aplicaciones.

Una primera aplicación de las ideas expuestas hasta ahora es la prueba del siguiente teorema

Teorema 3.2.10. Supongamos que $f_1, \dots, f_n \in A(\Delta)$ donde $A(\Delta) = C(\Delta) \cap \mathcal{O}(\Delta)$ siendo Δ el disco unidad tales que

$$|f_1(z)| + \dots + |f_n(z)| > 0, z \in \overline{\Delta}$$

Entonces existen $g_1, \dots, g_n \in A(\Delta)$ tales que

$$\sum_{i=1}^n f_i(z)g_i(z) = 1, z \in \overline{\Delta}$$

Otra aplicación viene dada por los siguientes teoremas, consideramos

$$A = \left\{ f \in C([- \pi, \pi]) \mid \widehat{f}(-n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 \right\}$$

subálgebra maximal de $C([- \pi, \pi])$

Teorema 3.2.11. Sea $g \in C([- \pi, \pi]) \setminus A$, es decir, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\widehat{g}(-n) \neq 0$. Entonces para cada $f \in C([- \pi, \pi])$ y cada $\varepsilon > 0$ existen polinomios

$$P_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{m(n)} a_{k,n} \cdot e^{ik\theta}, \quad n = 0, \dots, N$$

tales que

$$\left| f(e^{i\theta}) - \sum_{n=0}^N P_n(e^{i\theta}) \cdot g^n(e^{i\theta}) \right| < \varepsilon$$

Teorema 3.2.12 (Wiener). Supongamos que

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$$

y que la función real $f(e^{in\theta})$ no tiene ceros. Entonces se tiene que

$$\frac{1}{f(e^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n e^{in\theta}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma_n| < \infty$$

3.2.5. Transformada de Gelfand.

En esta sección asumiremos que A es un álgebra de Banach unitaria conmutativa.

Definición 3.2.8. Consideremos \mathcal{M} el conjunto de los homomorfismos complejos en A que se denomina usualmente espacio de ideales maximales de A debido al teorema (3.2.9). La función compleja, para cada $x \in A$

$$\widehat{x}(h) = h(x), \quad h \in \mathcal{M}$$

se denomina **transformada de Gelfand** de x .

Consideremos sobre \mathcal{M} la topología que hace continua a la familia de funciones

$$\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$$

por lo que para dicha topología, claramente, $\widehat{A} \subset C(\mathcal{M})$

Definición 3.2.9. Se llama radical de A a la intersección de todos los ideales maximales de A y se denota por $radA$. Cuando $radA = \{0\}$ se dice que A es **semisimple**.

Teorema 3.2.13. Sea \mathcal{M} el espacio de ideales maximales de A . Entonces

1. \mathcal{M} es espacio topológico compacto y Hausdorff.
2. La transformada de Gelfand es un homomorfismo de A en una subálgebra de $\widehat{A} \subset C(\mathcal{M})$. Además dicha transformación es un isomorfismo si y sólo si A es semisimple.

3. Se tiene que $\forall x \in A$, $\text{Im}\widehat{x} = \sigma(x)$. Además si

$$\rho(x) = \|\widehat{x}\|_\infty = \max_{h \in \mathcal{M}} |\widehat{x}(h)|$$

entonces

$$x \in \text{rad}A \iff \rho(x) = 0$$

Teorema 3.2.14. Sea $\Psi: A \rightarrow B$ homomorfismo entre álgebras de Banach conmutativas donde A es semisimple. Entonces Ψ es continua.

Corolario 3.2.3. Todo isomorfismo entre álgebras de Banach semisimples es homeomorfismo.

Lema 3.2.1. Sea A un álgebra de Banach unitaria y conmutativa y consideremos las cantidades

$$r = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|x^2\|}{\|x\|^2}, \quad s = \inf_{x \in A \setminus \{0\}} \frac{\|\widehat{x}\|_\infty}{\|x\|}$$

Entonces $s^2 \leq r \leq s$.

Teorema 3.2.15. La transformación de Gelfand es una isometría de A en \widehat{A} si y solo si $r = 1$, es decir, $\|x^2\| = \|x\|^2$, $x \in A$. Si además A es semisimple entonces \widehat{A} cerrada si y solo si existe $k < \infty$ tal que $\|x\|^2 \leq k \cdot \|x^2\|$, $x \in A$.

Ejemplo 3.2.2. Algunos ejemplos interesantes vienen dados por

1. Sea K un compacto Hausdorff y consideremos $C(K)$ el espacio de las funciones continuas definidas sobre K . Se tiene que $C(K)$ es álgebra de Banach conmutativa con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Además $\mathcal{M}_{C(K)} = K$.
2. Todo álgebra de Banach conmutativa finitamente generada se puede identificar como límite uniforme de los polinomios en $K = \phi(\mathcal{M}_A) \subset \mathbb{C}^n$ donde

$$\phi: \mathcal{M}_A \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad \phi(h) = (\widehat{x}_1(h), \dots, \widehat{x}_n(h))$$

Capítulo 4

Teoría de aproximación.

Este curso, dividido en dos partes, aborda en su primera parte el estudio de la existencia y unicidad de interpolantes, y en su segunda parte, el estudio de la interpolación con los aproximantes de Padé y tipo Padé unipuntuales así como la convergencia y tres teoremas clásicos relacionados.

El programa del curso se detalla a continuación:

4.1. Interpolación racional. Existencia y unicidad de interpolantes.**4.1.1.** Interpolación y esquemas de interpolación.**4.1.2.** Interpolación polinómica.**4.1.3.** Interpolación de Cauchy-Jacobi.**4.1.4.** Aproximantes de Padé multipuntuales.**4.1.5.** Defectos de interpolación.**4.1.6.** Aproximación racional con polos prefijados.**4.2.** Aproximantes de Padé y Tipo-Padé unipuntuales.**4.2.1.** Aproximaciones de Padé multipuntuales.**4.2.2.** Propiedades algebraicas.**4.2.3.** Relación con algunos métodos numéricos. El método de δ^2 de Aitken. El ϵ -algoritmo y el μ -algoritmo. El problema de la raíz y el QD algoritmo.**4.2.4.** Relación con las fracciones continuas.**4.3.** Convergencia de los interpolantes racionales. Tres teoremas clásicos.**4.3.1.** Teorema de Montessus de Ballore (1902)**4.3.2.** Teorema de Markov (1894)**4.3.3.** Teorema de Stieltjes (1895)

4.1. Interpolación racional. Existencia y unicidad de interpolantes.

4.1.1. Interpolación y esquemas de interpolación.

A lo largo de este apartado abordaremos el problema de la interpolación racional tratando la existencia y la unicidad de los interpolantes exponiendo un artículo del alemán H. Stahl.

En todo el problema de interpolación se parte de una tabla triangular de nodos del plano complejo extendido, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, permitiéndose la aparición de nodos repetidos.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

Consideremos para $n \in \mathbb{N}$

$$A(n) = \{a_{n,1}, a_{n,2}, \dots, a_{n,n}\} \subset \{a_1, \dots, a_m\} = S(A)$$

m puntos distintos con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_m respectivamente en $A(n)$ satisfaciendo que $\sum_{k=1}^m m_k = n$

Consideraremos, en lo sucesivo, la siguiente notación:

$$\begin{aligned} S(A) &= \text{“soporte de } A \text{ (ptos distintos)”} \subseteq \overline{\mathbb{C}} \\ \Pi_m &= \{a_m \cdot z^m + \dots + a_1 \cdot z + a_0 / a_i \in \mathbb{C}\} \\ \Pi_{m,n} &= \{\frac{P}{Q} / P \in \Pi_m, Q \in \Pi_n\} \\ Z(P) &= \text{“conjunto de ceros de } P \text{ con todas sus multiplicidades”} \\ F(A) &= \text{“funciones definidas en } A \text{ suficientemente regulares”} \\ P(A; z) &= \text{“único polinomio cuyos ceros son } A \cap \mathbb{C} \text{”} \end{aligned}$$

Observación 4.1.1. [Normalización en Π_n] Dado $p_n \in \Pi_n$, si consideramos su factorización

$$p_n(z) = a \cdot (z - a_1) \cdot \dots \cdot (z - a_n)$$

observamos que cuando sus ceros tienden a infinito el polinomio es no acotado. Sin embargo, se puede definir una factorización, no para todos los polinomios de Π_n , que permite en tales circunstancias que el polinomio permanezca acotado. Viene dada por

$$p_n(z) = \prod_{\xi \in Z(p_n)} H(z; \xi)$$

donde $H(z; \xi)$ se denomina factor lineal standard y se define mediante

$$H(z; \xi) = \begin{cases} z - \xi & |\xi| \leq 1 \\ \frac{z - \xi}{|\xi|} & |\xi| > 1 \\ 1 & \xi = \infty \end{cases}$$

Denotaremos por \mathcal{P}_n al conjunto de polinomios de Π_n que se pueden expresar mediante la factorización anterior. Claramente se observa que

$$p \equiv 1 \in \mathcal{P}_n \quad , \quad p \equiv 0 \notin \mathcal{P}_n$$

y además un polinomio de \mathcal{P}_n será mónico cuando todas sus raíces estén en el disco unidad.

Definición 4.1.1. Consideremos para cierto $n \in \mathbb{N}$

$$A = A(n) = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$$

un conjunto de puntos no necesariamente distintos. Decimos que $g \in F(A)$ *interpola* a $f \in F(A)$ en el conjunto A si existe $h = h(z)$ definida y acotada en un entorno de $S(A)$ tal que

$$f(z) - g(z) = P(A; z) \cdot h(z)$$

Observación 4.1.2. Podemos permitir que $a_i = \infty$ para algún a_i . En tal caso haremos el cambio de variable

$$\omega = \frac{1}{z - \xi}$$

para cierto $\xi \notin A$.

Observación 4.1.3. Dado $\xi \in \overline{\mathbb{C}}$ y $A \subset \overline{\mathbb{C}}$, el único polinomio que tiene sus ceros, $Z(P)$, en el conjunto $A \cap \mathbb{C}$ viene dado por

$$P_\xi(A; z) = \frac{P(A; z)}{H(z; \xi)^n}$$

donde $\Pi_{n, \xi} = \{P_\xi(A; z) / P \in \Pi_n\} = \{p(\frac{1}{z - \xi}) / p \in \Pi_n\}$ (análogamente con $\mathcal{P}_{n, \xi}$).

De las definiciones anteriores se desprende que $\Pi_{n, \infty} = \Pi_n$, $\mathcal{P}_{n, \xi} = \mathcal{P}_n$

Definición 4.1.2. Consideremos para cierto $n \in \mathbb{N}$

$$A = A(n) = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \overline{\mathbb{C}}$$

un conjunto de puntos no necesariamente distintos. Decimos que $g \in F(A)$ *interpola* a $f \in F(A)$ en el conjunto A si existe $h = h(z)$ definida y acotada en un entorno de $S(A)$ tal que

$$f(z) - g(z) = P_\xi(A; z) \cdot h(z)$$

para cierto $\xi \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(A)$.

Observación 4.1.4. Elecciones más usuales de ξ

1. $\xi = \infty$ cuando $\infty \notin S(A)$.
2. $\xi = 0$ cuando $\infty \in S(A)$ y $0 \notin S(A)$.
3. $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ cuando $0, \infty \in S(A)$.

4.1.2. Interpolación polinómica.

En este apartado expondremos los problemas clásicos de interpolación esbozando la forma que adopta la solución en cada caso.

Teorema 4.1.1 (Interpolación de Lagrange). *Dados $A = \{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{C}$ conjunto de nodos distintos y f una función definida en A .*

El problema de Lagrange consiste en encontrar $p \in \Pi_n$ de modo que

$$f(a_i) = p(a_i) \quad , \quad i = 0, \dots, n$$

que admite solución única dada por:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(a_i) \cdot L_i(x) \quad , \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - a_j}{a_i - a_j}$$

Teorema 4.1.2 (Interpolación de Hermite). *Dados $A = \{a_1, \dots, a_m\} \subset \mathbb{C}$ conjunto de m puntos distintos con multiplicidades m_1, m_2, \dots, m_m respectivamente satisfaciendo que $\sum_{k=1}^m m_k = n + 1$ y sea f una función definida en A con derivadas de orden $m_i - 1$ en cada a_i .*

El problema de Hermite consiste en encontrar $p \in \Pi_{n+1}$ de modo que

$$f^{(j)}(a_i) = p^{(j)}(a_i) \quad \text{para cada } i = 1, \dots, m \quad , \quad j = 0, \dots, m_i - 1$$

que admite solución única. Viene dada por:

$$L(z) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{m_i-1} L_{i,j}(z) \cdot f^{(j)}(a_j) \quad , \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{m_i-1} c_{j,k}^i \cdot P_{i,k}(z)$$

donde $B_k \cdot C_k = I$ siendo

$$C_k = \left(c_{i,j}^k \right)_{i,j=0}^{m_k-1} \quad \text{y} \quad B_k = \left(P_{k,i}^{(j)}(a_k) \right)_{i,j=0}^{m_k-1}$$

para $P_{k,i}(z) = (z - a_k)^i \cdot P(A_j; z)$ con A_j el conjunto de todos los nodos incluyendo las multiplicidades salvo los a_j .

Teorema 4.1.3 (Interpolación de Newton). *Dados $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ nodos distintos y f una función definida en ellos.*

El problema de interpolación de Newton consiste en encontrar $p \in \Pi_{n+1}$ de modo que

$$f(x_i) = p_{n+1}(x_i), \quad i = 0, \dots, n$$

que admite solución única y viene dado por

$$p_{n+1}(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + \dots + f[x_0, \dots, x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

donde

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}, \quad f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

son las diferencias divididas de Newton de orden n y de orden 1 respectivamente.

Teorema 4.1.4 (Interpolación de Taylor). *Dado $a \in \mathbb{R}$ y f una función con derivada de orden n definida en a .*

El problema de interpolación de Taylor consiste en encontrar $p \in \Pi_n$ de modo que

$$f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a), \quad k = 0, \dots, n$$

que admite solución única y viene dado por:

$$p_n(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

4.1.3. Interpolación de Cauchy-Jacobi.

Consideremos una función racional de la forma

$$r(z) = \frac{\alpha_m \cdot z^m + \dots + \alpha_1 \cdot z + \alpha_0}{\beta_m \cdot z^m + \dots + \beta_1 \cdot z + \beta_0} \in \Pi_{m,n}$$

Para determinarla completamente es necesario imponer $m + n + 1$ condiciones debido a que un grado de libertad se pierde en el cociente (basta con dividir numerador y denominador, por ejemplo, por el coeficiente director del uno de ellos y hacerlo mónico para observarlo).

Definición 4.1.3 (Interpolante de Cauchy-Jacobi). Una función racional $r \in \Pi_{m,n}$ es *interpolante de Cauchy-Jacobi* de $f \in F(A)$ cuando interpola a $f \in F(A)$ en A .

Ejemplo 4.1.1. Consideremos $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ conjunto de puntos distintos de forma que $f(a_1) = f(a_2) \neq f(a_3)$. ¿Existirá $r \in \Pi_{1,1}$ interpolante de Cauchy-Jacobi de f ? La respuesta es negativa debido a que las funciones racionales de $\Pi_{1,1}$

$$r(z) = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{\gamma \cdot z + \delta}$$

son transformaciones de Moëbius, que son inyectivas, con lo cual no pueden satisfacer las condiciones pedidas.

Teorema 4.1.5. Sean $R_1, R_2 \in \Pi_{m,n}$ que interpolan a $f \in F(A)$ en $A = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\}$.
Entonces

- I) Si $A \subset \mathbb{C}$, se tiene que $R_1 \equiv R_2$.
- II) Si $A \cap \overline{\mathbb{C}} \neq \emptyset$, se necesita que $m \geq n$ para que $R_1 \equiv R_2$.

Denotaremos por

$$\Pi_{m,n,\xi} = \left\{ \frac{P}{Q} / P \in \Pi_{m,\xi}, Q \in \mathcal{P}_{n,\xi} \right\}$$

donde $\Pi_{n,\xi} = \left\{ P \left(\frac{1}{z-\xi} \right) / P \in \Pi_m \right\}$.

Observación 4.1.5. 1. $\Pi_{m,n,\infty} = \Pi_{m,n}$

2. $\Pi_{n,n,\xi} = \Pi_{n,n,\mu}$, $\forall \xi, \mu \in \overline{\mathbb{C}}$
3. $\Pi_{m,n,\xi} = \Pi_{N,N}$, $N = \max(m, n)$

Lema 4.1.1. Sea $A = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\} \subset \mathbb{C}$ y consideremos $\xi \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(A)$. Si $R_1, R_2 \in \Pi_{m,n,\xi}$ interpolan a $f \in F(A)$ entonces $R_1 \equiv R_2$.

Veamos cómo se manifiesta en un ejemplo práctico.

Ejemplo 4.1.2. Consideremos $A = \{0, 0\}$ y $f(z) = 1 + z \in F(A)$, como 0 es de multiplicidad 2 impondremos a los interpolantes las condiciones $f(0) = R_i(0)$ y $f'(0) = R_i'(0)$.

1. Considerando interpolantes de $\Pi_{1,0,1}$

$$R_1(z) = \frac{\alpha_1 \cdot \frac{1}{z-1} + \alpha_0}{1} \Rightarrow R_1(z) = \frac{-1}{z-1}$$

2. Considerando interpolantes de $\Pi_{1,0,-1}$

$$R_1(z) = \frac{\alpha_1 \cdot \frac{1}{z+1} + \alpha_0}{1} \Rightarrow R_1(z) = 2 - \frac{1}{z+1}$$

3. Considerando interpolantes de $\Pi_{0,1,1}$

$$R_1(z) = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{1}{z-1} + \alpha_0} \Rightarrow R_1(z) = \frac{1}{2 + \frac{1}{z-1}}$$

4. Considerando interpolantes de $\Pi_{0,1,-1}$

$$R_1(z) = \frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{1}{z+1} + \alpha_0} \Rightarrow R_1(z) = \frac{1}{\frac{1}{z+1}}$$

4.1.4. Aproximantes de Padé multipuntuales.

Como punto de partida estamos interesados en resolver el problema

$$f(z) - \frac{P}{Q}(z) = P_\xi(A; z) \cdot h(z) \quad (4.1)$$

donde $\frac{P}{Q}(z) = \frac{\hat{P}}{\hat{Q}}\left(\frac{1}{z-\xi}\right)$ para cierta $f \in F(A)$ que se conoce como **problema de interpolación fuerte**.

Linealizando el problema resulta

$$Q(z) \cdot f(z) - P(z) = P_\xi(A; z) \cdot Q(z) \cdot h(z) \quad (4.2)$$

que se conoce como **problema débil de interpolación**.

Lema 4.1.2 (Solución del problema débil de interpolación). Consideremos $A = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, $f \in F(A)$ y $\xi \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(A)$.

Existen polinomios $P_{m,n} \in \Pi_{m,\xi}$ y $Q_{m,n} \in \mathcal{P}_{m,\xi}$ tales que

$$Q_{m,n}(z) \cdot f(z) - P_{m,n}(z) = P_\xi(A; z) \cdot Q_{m,n}(z) \cdot h(z)$$

donde $h(z)$ está definida y acotada en un entorno de $S(A)$.

Además la función racional

$$R_{m,n}(f; A; \xi; z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

está unívocamente determinada y si $m = n$ entonces $R_{m,n}$ es independiente de la elección de ξ .

Definición 4.1.4 (Aproximante de Padé multipuntual). En las condiciones anteriores, a la función $R_{m,n}(f; A; \xi; z)$ se le denomina aproximante de Padé multipuntual (APM) de f

Observación 4.1.6 (Situaciones particulares). I) Consideremos $A = A(m+n+1) = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\}$, $\xi = \infty$ y sea

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot z^i$$

no necesariamente analítica pudiendo ser una serie formal que sólo converge en el origen.

El aproximante de Padé clásico se denota por $\left[\frac{m}{n}\right]_f(z)$.

II) Consideremos $A = A(m+n+1) = \{a_1, \dots, a_{m+n+1}\}$, $\xi = 0$ y sea

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot z^i$$

en las mismas condiciones que antes.

El aproximante de Padé clásico se denota por $\left[\frac{m}{n}\right]_f\left(\frac{1}{z}\right)$.

4.1.5. Defecto de interpolación.

Una vez obtenidas las soluciones a la ecuación (4.2) dadas en el lema (4.1.2), definimos la función racional, $R = \frac{P}{Q}$, que interpola a $f \in F(A)$ en A . Si Q se anula en algún punto de A puede surgir lo que se conoce como defecto de interpolación, lo que justifica la elección del nombre de “aproximante”, y que se aborda en este apartado.

Sea $f \in F(A)$ y $R_{m,n}(f, A, \xi; z) = R_{m,n}(z)$. Consideremos

$$\Pi_{\xi}(A) = \{P \in \Pi_{k,\xi} / k \in \mathbb{N} \wedge P(z) \neq 0, z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S(A)\}$$

Llamamos $P_0(z) \in \Pi_{\xi}(A)$ al polinomio de mayor grado que satisface que

$$f(z) - R_{m,n}(z) = P_0(z) \cdot h(z)$$

para cierta $h = h(z)$ definida y acotada en un entorno de $S(A)$. El orden de contacto de f y $R_{m,n}$ es ∂P_0 , es decir,

$$f(z) - R_{m,n}(z) = o(z^{\partial P_0}), z \rightarrow 0$$

Definición 4.1.5. En las condiciones anteriores para $a \in S(A)$ definimos el **orden de defecto de interpolación** de $R_{m,n}$ a f en dicho punto como

$$d(a) = \text{card}(A_{\{a\}} \setminus Z(P_0))$$

El **orden de defecto total** de $R_{m,n}$ a f viene dado por

$$d = \text{card}(A \setminus Z(P_0))$$

mientras que el **orden del defecto de normalidad** es la cantidad

$$d_0 = \text{card}(A \Delta Z(P_0))$$

donde Δ representa la diferencia simétrica de conjuntos.

Cuando $d_0 = 0$ se dice que se trata de una **interpolación normal**. Sin embargo, en caso de defecto de interpolación se tiene que $d_0 = d$

Lema 4.1.3. Si $Q_{m,n}(a) \neq 0, \forall a \in S(A)$, entonces

$$R_{m,n}(f, A, \xi; z) = \frac{P_{m,n}(z)}{Q_{m,n}(z)}$$

interpola a f en A . Esto es, los problemas de interpolación débil y fuerte son equivalentes.

Ejemplo 4.1.3. Consideremos $A = \{-1, 0, 1\}$. Las soluciones del problema débil para $f_1(z) = z$ vienen dadas por $p_1(z) = q_1(z) = z$ que definen el APM $R_1(z) \equiv 1$ que no interpola a f en A . Sin embargo para la función $f_2(z) = 1 + z - z^3$, las soluciones del debil resultan ser independientes de ξ definiendo un aproximante que interpola a f en A .

4.1.6. Interpolación racional con polos prefijados.

Para resolver el problema de interpolación fuerte con los nodos A prefijados resolvemos el problema débil en las condiciones de que $m = n$.

Lema 4.1.4. *Consideremos A , y B dos conjuntos de $n + 1$ y n puntos no necesariamente distintos cuyos soportes sean disjuntos y sea $f \in A$. Existe una única función racional $R_n(z) = R_{n,n}(f, A, B; z)$ que interpola a f en A y que tiene todos sus polos en B .*

Definición 4.1.6. A la función racional que se define unívocamente en el lema anterior denotada por $R_n(z)$ se le denomina **aproximante tipo Padé Multipuntual (ATPM)**

4.2. Aproximantes de Padé y tipo Padé unipuntuales

Consideremos el problema de interpolación fuerte con los nodos $A(m + n + 1) = \{0, \dots, 0\}$ cuya solución venga dada por $R_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ en las condiciones dadas por lema (4.1.3), para cierta $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot z^i \in F(A)$.

El problema de interpolación fuerte según Baker es

$$f(z) - \frac{P_m}{Q_n}(z) = o(z^{m+n+1}) \quad (4.3)$$

mientras que el débil

$$f(z) \cdot Q_n(z) - P_m(z) = o(z^{m+n+1}) \quad (4.4)$$

4.2.1. Construcción del aproximante.

Asumiremos las condiciones del lema (4.1.3), es decir, exigimos que $Q(0) = b_0 \neq 0$ para garantizar la equivalencia de problemas (4.3) y (4.4), construyendo el interpolante en estas circunstancias.

Consideremos los polinomios

$$P_m(z) = \sum_{i=0}^m a_i \cdot z^i \quad , \quad Q_n(z) = \sum_{i=0}^n b_i \cdot z^i$$

Sabemos que $m \geq n$ y que $Q_n(0) \neq 0$. Planteando el problema débil y agrupando convenientemente obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^k b_i \cdot c_{k-i} \right) \cdot z^k - \sum_{k=0}^m a_k \cdot z^k = o(z^{m+n+1}) \text{ siendo } b_i = 0 \text{ , } i > n$$

que resulta en las condiciones

$$\sum_{i=0}^k b_i \cdot c_{k-i} = a_k \text{ , } k = 0, \dots, m \quad (4.5)$$

$$\sum_{i=0}^k b_i \cdot c_{k-i} = 0, \quad k = m+1, \dots, m+n \quad (4.6)$$

denominadas **Ecuaciones de Padé**.

El sistema de ecuaciones de (4.6) tiene $n+1$ incógnitas b_0, \dots, b_n y n ecuaciones por lo que depende de un parámetro (el grado de libertad que permite un cociente), b_0 , en virtud de que

$$c(m/n) = \begin{vmatrix} c_m & \cdots & c_{m-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n-1} & \cdots & c_m \end{vmatrix} = Q_n(0) \neq 0 \quad (4.7)$$

que es el determinante del sistema que resulta al tomar b_0 como parámetro. Por otra parte, el resto de ecuaciones de (4.5) determina las $n+1$ incógnitas a_0, \dots, a_n .

Las soluciones quedan de la forma

$$Q_n(z) = \begin{vmatrix} c_{m+1} & \cdots & c_{m-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & \cdots & c_m \\ 1 & \cdots & z^n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_{m+1} & \cdots & c_{m-n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m+n} & \cdots & c_m \\ \sum_{i=0}^m c_i \cdot z^i & \cdots & \sum_{i=0}^{m-n} c_i \cdot z^{i+n} \end{vmatrix} = P_m(z) \quad (4.8)$$

y que se tomarán como definición de aquí en adelante.

Dada una solución al problema fuerte de Baker, $R_{m,n} = \frac{A_m}{B_n}$, si $B_n(0) \neq 0$ se define el AP por $[\frac{m}{n}]_f = \frac{A_m}{B_n}$ que satisface que

$$A_m(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(0)}, \quad B_n(z) = \frac{B_n(z)}{Q_n(0)}$$

estando, la existencia de solución, condicionada por la relación dada por $c(m/n)$

Teorema 4.2.1 (Jacobi, 1846). Si $c(m/n) = Q_n(0) \neq 0$ entonces $[\frac{m}{n}]_f = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$

La **tabla de Padé** no es más que una tabla de doble entrada en la que se escriben los aproximantes de Padé en forma de serie de potencias.

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & m \\ 0 & [\frac{0}{0}] & \cdots & [\frac{m}{0}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & [\frac{0}{n}] & \cdots & [\frac{m}{n}] \end{array}$$

cuyo estudio se facilita mediante el estudio de los bloques de ceros de la c-tabla

$$\begin{array}{c|ccc} & 0 & \cdots & m \\ 0 & c(0/0) & \cdots & c(m/0) \\ 1 & c(0/1) & \cdots & c(m/1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & c(0/n) & \cdots & c(m/n) \end{array}$$

que se corresponden con bloques de ceros en la tabla de Padé en ciertas condiciones. El número de aproximantes a calcular se ve reducido debido a que, en la c -tabla, un único cero siempre está rodeado de números no nulos y que una columna de r ceros forma parte siempre de un bloque, al menos lado r . El cálculo de la c -tabla se reduce al uso de ciertas propiedades de recurrencia de los c_i ,

$$\text{I) } c(m/0) = 1$$

$$\text{II) } c(m/1) = c_n$$

$$\text{III) } c(0/n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c_0^n$$

$$\text{IV) } c(m/n + 1) = \frac{c(m-1/n) \cdot c(m+1/n) - c(m/n)}{c(m/n-1)}$$

Teorema 4.2.2 (Teorema de Padé.). Si $c(m/n) \neq 0$ entonces las entradas en la tabla de Padé están determinadas de forma única por $[\frac{m}{n}]_f = \frac{A_m}{B_n} = \frac{P_m}{Q_n}$.

A cada bloque $r \times r$ de la c -tabla corresponde un $(r+1) \times (r+1)$ bloque en la tabla de Padé para el que

$$\text{I) } c(\lambda/\mu) \neq 0$$

$$\text{II) } c(\lambda + i/\mu) \neq 0, \quad i = 1, \dots, r$$

$$\text{III) } c(\lambda/\mu + j) \neq 0, \quad j = 1, \dots, r$$

$$\text{IV) } c(\lambda + i/\mu + j) \neq 0, \quad i, j = 1, \dots, r$$

Un AP, $[\frac{m}{n}]$, existe en este bloque y se tiene que

$$\left[\frac{m}{n} \right] = \left[\frac{\lambda}{\mu} \right]$$

cuando se satisface que $m + n \leq \lambda + \mu + r$, no existiendo en caso contrario.

4.2.2. Métodos de aceleración de la convergencia de sucesiones.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente a a . Nos proponemos definir una sucesión $\{\widetilde{a}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente a a que satisfaga que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widetilde{a}_n - a}{a_n - a} = 0$$

Teorema 4.2.3 (Teorema del Δ^2 de Aitken.). Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a}{a_{n+1} - a} = M \equiv \text{cte}$$

entonces tenemos las condiciones de antes para la sucesión

$$\widetilde{a}_n = a_n - \frac{(\Delta a_{n-1})^2}{\Delta^2 a_{n-1}}$$

Observación 4.2.1. El inconveniente del método de Aitken es que si uno trata de aplicarlo una segunda vez, los errores de redondeo se convierten en significativos y deja de funcionar la aceleración de la convergencia.

El resto de algoritmos de aceleración de la convergencia de sucesiones se mostraron como aplicación de lo estudiado durante el curso de doctorado, no enunciándose debido a su extensión.

4.3. Convergencia de interpolantes. Tres teoremas clásicos.

En este apartado se estudian los problemas de convergencia que aparecen en la teoría de interpolación racional (aproximantes de Padé)

Recordemos que la tabla de Padé era

	0	1	...	
0	$\left[\frac{0}{0}\right]$	$\left[\frac{1}{0}\right]$	$\left[\frac{2}{0}\right]$...
1	$\left[\frac{0}{1}\right]$	$\left[\frac{1}{1}\right]$	$\left[\frac{2}{1}\right]$...
2	$\left[\frac{0}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{2}{2}\right]$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Las sucesiones más estudiadas son

Filas, dadas por $\left\{\frac{m}{n_0}\right\}_{m \in \mathbb{N}}$ y relacionadas con las funciones meromorfas del plano complejo con un número fijo y finito de polos.

Diagonales, dadas por $\left\{\frac{m}{m}\right\}_{m \in \mathbb{N}}$ y relacionadas con las funciones singulares del plano complejo.

Paradiagonales, dadas por $\left\{\frac{m+m_0}{m}\right\}_{m \in \mathbb{N}}$.

El teorema de Montessus de Ballore aborda el estudio de la convergencia de las filas mientras que los teoremas de Markov y de Stieltjes, la convergencia de las diagonales.

En el estudio de una sucesión de aproximantes de Padé, se pondrá atención a las condiciones para que exista convergencia puntual y/o uniforme y en tal caso, con los objetivos de que reproduzca a la función fuera del dominio de convergencia de la serie y que acelere la convergencia dentro del mismo.

4.3.1. Teorema de Montessus de Ballore, 1902

Estudiamos la convergencia por filas.

Teorema 4.3.1 (Montessus). Consideremos f una función holomorfa en un entorno del origen y meromorfa en un disco $\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ con n polos, z_1, \dots, z_n contando multiplicidades en dicho disco. Sea la sucesión

$$\left[\frac{m}{n} \right]_f \equiv r_{m,n} = \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}}, \quad m \in \mathbb{N}$$

con $p_{m,n} \in \Pi_m$ y $q_{m,n} \in \Pi_n$, entonces:

- I) Los ceros de los denominadores $\{q_{m,n}\}_{m \in \mathbb{N}}$, convergen a los polos de f , (z_1, \dots, z_n) de forma que cada polo "atrae" tantos ceros como indica su multiplicidad.
- II) La sucesión $\left[\frac{m}{n} \right]_f$ converge uniformemente sobre compactos de $D'_R = D_R \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$

Lema 4.3.1 (Expresión del error). En las circunstancias de antes,

$$\left(f - \frac{p_{m,n}}{q_{m,n}} \right) (z) = \frac{z^{m+n+1}}{2\pi i \cdot q_{m,n}(z) \cdot q(z)} \int_{|z|=r} \frac{[f \cdot q \cdot q_{m,n]}(x)}{x^{m+n+1}(x-z)} dx$$

4.3.2. Teorema de Markov, 1894

Aquí se aborda el estudio de la convergencia de las diagonales y cuya aplicación más directa es en las funciones de Markov.

Definición 4.3.1 (Función de Markov). Una función $f = f(z)$ es de Markov cuando se puede expresar como transformada de Cauchy de cierta medida de Borel positiva con soporte compacto en \mathbb{R} , es decir, $f(z) = \int \frac{d\mu(x)}{z-x}$

Observación 4.3.1. Conviene anotar que toda función de Markov es holomorfa en $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ si $\text{sop } \mu \subset [a, b]$ por lo que tiene sentido considerar los $AP|_{z=\infty}$ de las funciones de Markov, en particular, los de la forma $\left\{ \left[\frac{m-1}{m} \right]_f \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ ya el orden del infinito como cero es al menos 1.

Teorema 4.3.2 (Markov). Dada una función de Markov, f . La sucesión $r_m = \left[\frac{m-1}{m} \right] = \frac{p_{m-1}}{q_m}$ de interpolantes de f converge uniformemente a f cuando $n \rightarrow \infty$ en subconjuntos compactos de $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$.

Observación 4.3.2. Se puede comprobar que, en las condiciones anteriores, q_m es el m -ésimo polinomio ortogonal respecto a la medida μ , es decir,

$$q_m \perp \Pi_{m-1} \quad \text{con} \quad \langle g, h \rangle_\mu = \int g(x)h(x)d\mu(x)$$

y que q_m tiene m ceros simples en (a, b) .

Además para $[a, b] = [-1, 1]$, si $d\mu(x) = w(x)dx$ y tomamos

$$\begin{aligned}w_1 &= 1, \quad f_1(z) = \log \frac{z+1}{z-1} \\w_2 &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \\w_3 &= c\sqrt{1-x^2}, \quad f_2(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}} \\w_{\alpha,\beta} &= (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1\end{aligned}$$

obtenemos como q_m el m -ésimo polinomio de Legendre, Tchebyshev de 1^a , Tchebyshev de 2^a y Jacobi(α, β) respectivamente.

Capítulo 5

Optimización Poliédrica.

Este curso aborda el estudio de la programación lineal entera para problemas de optimización lineales haciendo un análisis de las diferentes técnicas para la obtención de soluciones enteras en un problema de estas características, que resultan ser: unimodularidad, cortes de Gomory, cortes de Chvátal, ramificación y acotación (branch & bound) y por último ramificación y corte (branch & cut). Se realiza a su vez un breve resumen de los resultados necesarios de la programación lineal a lo largo de la primera sección.

El programa del curso se detalla a continuación:

5.1. Rudimentos de la programación lineal.

5.1.1. Análisis convexo. Poliedros.

5.1.2. Algoritmo del simplex.

5.1.3. Dualidad.

5.1.4. Análisis de sensibilidad.

5.2. Programación lineal entera.

5.2.1. Unimodularidad.

5.2.2. Cortes.

5.2.3. Ramificación.

5.1. Rudimentos de la programación lineal.

5.1.1. Análisis convexo. Poliedros.

Consideremos $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y sea $S = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}^n$. Definimos por

combinación lineal en S a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ obtenido mediante

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad x_i \in S \text{ para } i = 1, \dots, k$$

combinación afín en S a cualquier combinación lineal de S verificando que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

combinación cónica en S a cualquier combinación lineal de S satisfaciendo que

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k$$

combinación convexa en S a cualquier combinación afín y cónica de S , es decir

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \quad x_i \in S \text{ para } i = 1, \dots, k \text{ y } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Diremos que S es subespacio lineal, afín, cónico o convexo cuando sea cerrado para tales combinaciones, es decir, una combinación lineal, afín, cónica o convexa de puntos de S vuelva a ser un punto de S . Enunciamos algunas propiedades interesantes de tales espacios.

- Un subespacio lineal contiene a toda recta que contenga al origen y a uno de sus puntos.
- Un subespacio afín contiene a toda recta que contenga a dos de sus puntos.
- Un subespacio cónico o cono contiene a toda semirrecta que comience en el origen y contenga a uno de sus puntos.
- Un subespacio convexo o convexo contiene al segmento de recta que contenga a dos de sus puntos.

Recordemos que $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^n$ es un hiperplano si existen $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaciendo que

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x = \beta\}$$

Todo hiperplano define dos semiespacios,

$$\mathcal{H}^- = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x \leq \beta\} \quad , \quad \mathcal{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n / \alpha x \geq \beta\}$$

Definición 5.1.1 (Punto extremo). Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in S$. Decimos que x_0 es *punto extremo* de S cuando

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in (0, 1) : x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \implies x_1 = x_2$$

Definición 5.1.2 (Rayo. Línea. Dirección). Sea $x_0, d \in \mathbb{R}^n$. Se define como *rayo* de dirección d al conjunto $\mathcal{R} = \{x_0 + \lambda d / \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ y como *línea* de dirección d al conjunto $\mathcal{L} = \{x_0 + \lambda d / \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Dado $S \subset \mathbb{R}^n$, decimos que $d \in \mathbb{R}^n$ es una *dirección* de S cuando éste contiene a la línea que define la dirección d para cierto $x_0 \in S$. Análogamente se define *rayo* de S .

Definición 5.1.3 (Rayo extremo. Dirección extrema). Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}^n$ una dirección de S , decimos que d es *dirección extrema* de S cuando

$$\forall d_1, d_2 \text{ direcciones de } S, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+ : d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 \implies \exists \mu \in \mathbb{R} : d_1 = \mu d_2$$

Un rayo de S se dirá *extremo* cuando la dirección que lo define sea extrema en S .

El conjunto de las direcciones de S viene dado por

$$D = \{d \in \mathbb{R}^n / \{x_0 + \lambda d / \lambda \in \mathbb{R}\} \subset S \text{ para cierto } x_0 \in S\}$$

que se normaliza mediante

$$D^* = \{d \in D / \|d\| = 1\}$$

Enunciamos una caracterización de las direcciones extremas de un conjunto.

Proposición 5.1.1. d es dirección extrema de $S \iff d$ es punto extremo de D^*

Recordamos que una función $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ para cierto $S \subset \mathbb{R}^n$ se dice *convexa* en S cuando

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Proposición 5.1.2. Si $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa para S convexo, entonces $S_k = \{x \in S / f(x) \leq k\}$ es un conjunto convexo. Además si x_0 es mínimo local de f en S , entonces x_0 es mínimo global de S .

Definición 5.1.4 (Poliedro. Polítopo. Cono poliédrico). Un *poliedro* es una intersección de un número finito de semiespacios, por lo que

$$\exists A \in M_{m,n}, \exists b \in \mathbb{R}^m : \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$$

Un *polítopo* es un poliedro acotado.

Un **cono poliédrico** es la intersección de un número finito de semiespacios definidos por hiperplanos que contienen al origen, por lo que

$$\exists A \in M_{m,n} : \mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq 0\}$$

Decimos que \mathcal{F} es una **cara** del poliedro \mathcal{P} cuando satisface con igualdad una desigualdad válida para \mathcal{P} . Una **faceta** es una cara propia maximal y queda definida por una desigualdad cuando todos sus puntos la satisfacen.

Proposición 5.1.3 (Caracterización de puntos extremos). *Consideremos $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $x_0 \in \mathcal{P}$. Entonces, son equivalentes:*

- I) x_0 es punto extremo de \mathcal{P}
- II) x_0 satisface n desigualdades linealmente independientes en $\{Ax \leq b, x \geq 0\}$

Proposición 5.1.4 (Caracterización de direcciones extremas). *Consideremos $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ y $x_0 \in \mathcal{P}$. Entonces, son equivalentes:*

- I) d es dirección extrema de \mathcal{P}
- II) $Ad \leq 0, d > 0$

Teorema 5.1.1 (Tma. fundamental de representación de poliedros). *Consideremos*

$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ con $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Entonces,

- I) $\exists x_1, \dots, x_k \in \mathcal{P}$ puntos extremos de \mathcal{P} , ($k > 0$)
- II) $\exists d_1, \dots, d_l \in \mathbb{R}^n$ direcciones extremas de \mathcal{P} , ($l = 0 \Leftrightarrow \mathcal{P}$ es polítopo)

Además,

$$\forall x_0 \in \mathcal{P}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{R}^+, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 : x_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$$

Teorema 5.1.2 (Tma. fundamental de las desigualdades lineales). *Sean $a_1, \dots, a_m, b \in \mathbb{R}^n$. Entonces, se satisface una sólo de las propiedades siguientes*

- I) $b \in \text{cono}\{a_1, \dots, a_m\}$
- II) $\exists c \in \mathbb{R}^n : cb < 0 \wedge ca_1, \dots, ca_m \geq 0 \wedge \mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n / cx = 0\}$ contiene $\text{rang}\{a_1, \dots, a_m, b\} - 1$ vectores linealmente independientes de $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Lema 5.1.1 (Farkas). *Sea $A \in M_{m,n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Entonces*

$$\exists x \geq 0 : Ax = b \iff (y^t A \geq 0 \implies y^t b \geq 0)$$

Observación 5.1.1. Se pueden encontrar algunas variantes del lema anterior

- I) $\exists x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \iff (\forall y \geq 0 : y^t A = 0 \implies y^t b \geq 0)$
- II) $\exists x \geq 0 : Ax \leq b \iff (\forall y \geq 0 : y^t A \geq 0 \implies y^t b \geq 0)$

5.1.2. Algoritmo del simplex.

En esta sección se presenta el algoritmo del simplex que sirve para resolver en un número finito de pasos el problema standard de programación lineal

$$\text{mín}\{cx \mid x \in \mathcal{P}\} \text{ con } \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \quad (5.1)$$

Teorema 5.1.3. *El problema dado por (5.1) tiene*

- I) una dirección extrema $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $cd < 0 \implies$ PROBLEMA NO ACOTADO.
 II) un punto extremo $x^* \in \mathcal{P}$ tal que $cx^* \leq cx, \forall x \in \mathcal{P} \implies$ PROBLEMA ACOTADO
 CON SOLUCIÓN ÓPTIMA.

Definición 5.1.5 (Base. Solución básica (factible)). Dada $A \in M_{m,n}$ con $\text{rang } A = m \leq n$, se define una **base** de A a cualquier submatriz cuadrada, $B \in M_m$, de rango máximo. Las columnas restantes de A se denominan **no básicas** y se denotan por N , obteniéndose que $A = [B, N]$. El punto $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ dado por

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \quad x_N = 0$$

se denomina **solución básica** asociada a la base B . Además si $x \geq 0$ se dirá que x es **solución factible básica**. En estas condiciones, si $x_B > 0$ la solución es **no degenerada** mientras que es **degenerada**, en caso contrario.

Teorema 5.1.4 (Caracterización de soluciones factibles básicas). *Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$. Entonces*

$$x \in \mathcal{P} \text{ es punto extremo} \iff x \text{ es solución factible básica de } Ax = b$$

Definición 5.1.6 (Costos reducidos). Sea B una base factible del poliedro $\mathcal{P} = \{Ax = b, x \geq 0\}$ y x una solución cualquiera del mismo. Definimos **vector de costos reducidos** como el siguiente

$$\bar{c}^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}A$$

que representa la dirección en la que se encuentra la siguiente base a tomar. Se tiene que

$$c^t x = c_B^t B^{-1}b + (c_N^t - c_B^t B^{-1}N)x_N = c_B^t B^{-1}b + \bar{c}^t x_N$$

Teorema 5.1.5. *Sea B una base factible del poliedro $\mathcal{P} = \{Ax = b, x \geq 0\}$ y consideremos $\bar{c}^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}A$ el vector de costos reducidos. Entonces si $\bar{c}^t \geq 0$, la solución factible básica dada por $x_B = B^{-1}b, x_N = 0$ es óptima.*

Teorema 5.1.6 (Cambio de base). *Sea B una base factible del poliedro $\mathcal{P} = \{Ax = b, x \geq 0\}$ y consideremos $\bar{c}^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}A$ el vector de costos reducidos. Supongamos $\bar{c}^t \not\geq 0$, es decir, $\exists x_h \in x_N$ tal que $\bar{c}_h < 0$. Entonces*

- I) x_h entra en la base con valor $x_h = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ih}} / \bar{a}_{ih} > 0 \right\}$
- II) Sale $x_r \in x_B$ de la base tal que $x_h = \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rh}}$ pasando a tomar valor 0
- III) Si $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\bar{a}_{ih} > 0$ y $\bar{b}_i = 0$ entonces $x_h = 0$ siendo la base degenerada.
- IV) La nueva base será $\tilde{B} = B \setminus a_r \cup a_h$.
- v) La función objetivo mejora en $-\bar{c}_h \frac{\bar{b}_r}{\bar{a}_{rh}}$

Proposición 5.1.5 (El simplex en forma de tableau). Consideremos el problema

$$\min\{c^t x / x \in \mathcal{P}\} \text{ donde } \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \quad (5.2)$$

y supongamos $A = [B, N]$ una base factible. Podemos representar toda la información necesaria para la resolución del problema en la tabla

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{c} x \\ \hline A \\ \hline c^t \end{array} \\
 \begin{array}{c} x \\ \hline \end{array} & \begin{array}{c} RHS \\ \hline b \\ \hline 0 \end{array}
 \end{array}
 \longrightarrow
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} x_B \\ \hline B \\ \hline c_B^t \end{array} & \begin{array}{c} x_N \\ \hline N \\ \hline c_N^t \end{array} & \begin{array}{c} RHS \\ \hline b \\ \hline 0 \end{array} \\
 \begin{array}{c} x_B \\ \hline \end{array} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

Premultiplicando el tableau por la matriz

$$\begin{array}{cc}
 B^{-1} & 0 \\
 -c_B^t B^{-1} & I
 \end{array}$$

obtenemos el simplex en forma paramétrica, dado por

$$z = c_B^t B^{-1} b + \bar{c}^t x_N \text{ con } x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

resultando la tabla como sigue,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} x_B \\ \hline I \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} x_N \\ \hline B^{-1} N \\ \hline c_N^t - c_B^t B^{-1} N \end{array} & \begin{array}{c} RHS \\ \hline B^{-1} b \\ \hline -c_b^t B^{-1} b \end{array} \\
 \begin{array}{c} x_B \\ \hline \end{array} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

que representaremos mediante

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & \begin{array}{c} x_B \\ \hline I \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} x_N \\ \hline \bar{N} \\ \hline \bar{c}^t \end{array} & \begin{array}{c} RHS \\ \hline \bar{b} \\ \hline w \end{array} \\
 \begin{array}{c} x_B \\ \hline \end{array} & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

si llamamos $\bar{N} = B^{-1}N$, $\bar{b} = B^{-1}b$ y $\bar{c}^t = c_N^t - c_B^t B^{-1}N$ siendo $w = -c_B^t B^{-1}b$ el valor de la función objetivo en la base B cambiado de signo.

Para actualizar un tableau cuando la variable x_h entra en la base a cambio de x_r debemos realizar la operación de **pivotaje** que consiste en buscar la columna r -ésima de la identidad en \bar{a}_h ($\bar{a}_h \equiv$ columna h de la matriz $B^{-1}A$) y que se compone de las siguientes operaciones sobre el tableau

- I) Dividir la fila r -ésima del tableau por la cantidad $\bar{a}_{rh} > 0$ obteniendo así un 1 en la posición (r,h) .
- II) $\forall s = 1, \dots, m$ con $s \neq r$ restar, a la fila s -ésima, la nueva fila r -ésima multiplicada por la cantidad \bar{a}_{sh} resultando un 0 en la posición (s,h) .

Proposición 5.1.6 (Base factible inicial). Supongamos que $b \geq 0$

A) Identificando la identidad.

Es posible obtener una base factible inicial cuando el problema es de la forma (5.2) sin más que añadir una variable de holgura en cada restricción teniéndose así la base buscada.

$$\begin{array}{ll} \text{mín } c^t x & \text{mín } c^t x + 0x^h \\ Ax \leq b & \equiv Ax + Ix^h = b \\ x \geq 0 & x, x^h \geq 0 \end{array}$$

En estas condiciones $A = [B, N]$, $B = I_m$

B) Método de la M grande.

Añadimos las variables que necesitamos para obtener (o completar) la identidad con costo un valor M suficientemente grande (denominadas **variables artificiales**).

$$\begin{array}{ll} \text{mín } c^t x & \text{mín } c^t x + M1^t x^a \\ Ax = b & \equiv Ax + Ix^a = b \\ x \geq 0 & x, x^a \geq 0 \end{array}$$

En estas condiciones $A = [B, N]$, $B = I$

C) Método de las dos fases.

FASE I: Resolvemos el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín } 1^t x^a & \\ Ax + Ix^a = b & \\ x, x^a \geq 0 & \end{array}$$

considerando (x, x^a) su solución óptima.

- Si $x^a \neq 0$ entonces el problema original es no factible.

- Si $x^a = 0$ entonces el problema original es factible.

FASE II: Eliminamos las variables x^a en caso de ser no básicas y si no ($\exists x_h^a \in x_B$), forzamos a que salgan pivotando de acuerdo al siguiente criterio de elección

- Si existe $j \in N$ tal que $\bar{a}_{hj} \neq 0$ entonces entra x_j .
- En caso contrario, eliminamos la fila j (y la variable x_h^a) por ser combinación lineal de las demás.

y resolvemos el problema resultante tras cambiar el vector de costos por el original, actualizando el tableau si fuese necesario.

D) Método de una sola variable artificial.

Pivotando para obtener la identidad determinamos una base que, si no es factible ($\bar{b} \not\geq 0$), introduciendo una variable artificial en todas las restricciones y obligando a que entre en la base a cambio de la variable básica x_r tal que

$$\bar{b}_r = \min_{1 \leq i \leq m} \{\bar{b}_i\} < 0$$

resulta ser factible obligando, con uno de los dos métodos anteriores, a que salga dicha variable de la base.

Proposición 5.1.7 (Convergencia y degeneración). El poliedro $\mathcal{P} = \{Ax = b, x \geq 0\}$ tiene un número finito de bases factibles. Una cota superior es el valor $C_n^m = \binom{n}{m}$ por lo que si no repetimos base, el algoritmo del simplex es un proceso finito. Sin embargo, si alguna base resulta ser degenerada puede ocurrir lo que se conoce como **ciclado** repitiéndose las bases.

Proposición 5.1.8 (Regla de Bland). Cuando haya que elegir una variable de un conjunto de ellas posible, elegir siempre la variable de índice menor. En estas condiciones el algoritmo del simplex acaba en no más de $C_n^m = \binom{n}{m}$ iteraciones.

5.1.3. Dualidad.

Teorema 5.1.7 (Relación de polaridad). Consideremos el problema dado en (5.2). Entonces se tiene que

$$\min\{c^t x / x \in \mathcal{P}\} = \max\{c_0 \in \mathbb{R} / c^t x \geq c_0, \forall x \in \mathcal{P}\}$$

Teorema 5.1.8. Sea $\mathcal{P} = \{Ax = b, x \geq 0\}$ y $c_0 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$c^t x \geq c_0 \text{ es válida para } \mathcal{P} \iff \exists u \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } c^t \geq u^t A \wedge c_0 \leq u^t b$$

Definición 5.1.7 (Problema primal \leftrightarrow Problema dual). Por la relación de polaridad y el teorema anterior se tiene que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^t x / Ax \leq b, x \geq 0\} = \max_{u \in \mathbb{R}^m} \{u^t b / c^t \geq u^t A\}$$

siendo cada uno de ellos, respectivamente, el **problema primal** y **problema dual**.

Se tienen las siguientes relaciones de dualidad:

$$\begin{array}{l|l} a_i^t x \geq b_i & \longleftrightarrow u_i \geq 0 \\ a_i^t x \leq b_i & \longleftrightarrow u_i \leq 0 \\ a_i^t x = b_i & \longleftrightarrow u_i \text{ libre} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} x_j \geq 0 & \longleftrightarrow u^t a_{.j} \leq c_j \\ x_j \leq 0 & \longleftrightarrow u^t a_{.j} \geq c_j \\ x_j \text{ libre} & \longleftrightarrow u^t a_{.j} = c_j \end{array} \right.$$

Proposición 5.1.9. *El problema dual de un problema primal coincide con el problema primal (biyección dual).*

Teorema 5.1.9 (Dualidad fuerte). *Consideremos los poliedros*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \quad \mathcal{D} = \{u \in \mathbb{R}^m / c^t \geq u^t A, u \geq 0\}$$

y supongamos que $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Entonces

$$\min\{c^t x / Ax \leq b, x \geq 0\} = \max\{u^t b / c^t \geq u^t A\}$$

La interpretación económica del teorema anterior es que se garantiza que:

“existe un conjunto de acciones, valores asumibles x_i^* para las variables x_i , y un conjunto de precios sombra, valores asumibles u_j^* para las variables u_j , tales que el costo de producción mínima coincide con la ganancia máxima”.

Teorema 5.1.10 (Dualidad débil). *Consideremos los poliedros*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\} \quad \mathcal{D} = \{u \in \mathbb{R}^m / c^t \geq u^t A, u \geq 0\}$$

y supongamos que $\mathcal{P} \neq \emptyset$ y $\mathcal{D} \neq \emptyset$. Entonces

$$u^t b \leq c^t x, \forall x \in \mathcal{P} \wedge \forall u \in \mathcal{D}$$

Corolario 5.1.1. *Considerando los problemas primal y dual,*

$$\min\{c^t x / x \in \mathcal{P}\} \quad \max\{u^t b / u \in \mathcal{D}\}$$

se tiene que

- 1) O bien AMBOS problemas tienen óptimo finito, es decir, $\exists x^* \in \mathcal{P}$, $\exists u^* \in \mathcal{D}$ que satisfacen

$$c^t x^* = \min\{c^t x / x \in \mathcal{P}\} = \max\{u^t b / u \in \mathcal{D}\} = (u^*)^t b$$

- II) O bien el PRIMAL es no acotado y el DUAL, no factible.
 III) O bien el PRIMAL es no factible y el DUAL, no acotado.
 IV) O bien AMBOS son no factibles.

Proposición 5.1.10. Dada una pareja de problemas primal, dual

$$\min\{c^t x / Ax \geq b, x \geq 0\} \quad \max\{u^t b / A^t u \leq c, u \geq 0\}$$

y sean $x^* \in \mathcal{P}$ y $u^* \in \mathcal{D}$. Entonces son equivalentes:

- I) x^*, u^* son óptimos respectivos.
 II) $Ax^* \geq b, x \geq 0; A^t u^* \leq c, u^* \geq 0$ y $c^t x^* = (u^*)^t b$
 III) $(c^t - (u^*)^t A)x^* = 0$ y $(u^*)^t (Ax^* - b) = 0$

Proposición 5.1.11 (Adición de nuevas variables o restricciones). Supongamos una pareja primal, dual con óptimos

$$x^* = B^{-1}b \quad u^* = c_B^t B^{-1}$$

CASO 1: Si añadimos una nueva variable, a lo sumo se pierde la optimalidad dual con lo que podemos reoptimizar con el simplex primal.

CASO 2: Si añadimos una nueva restricción, a lo sumo se pierde la optimalidad primal y podemos reoptimizar con el simplex dual.

5.1.4. Análisis de sensibilidad.

Consideremos el problema primal

$$\begin{aligned} \min c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

con base óptima B Las condiciones de optimalidad son

- I) $Ax = b, x \geq 0$ (factibilidad primal).
 II) $A^t u \leq c, u \geq 0$ (factibilidad dual).
 III) $(c^t - A^t u)x = 0$ (ortogonalidad).

Estamos interesados en saber las condiciones a cumplir para que el problema siga siendo óptimo al variar el vector de costos o el vector de recursos.

■ **Variando b**

Supongamos que tomamos $\tilde{b} = b + \Delta b$, como la solución asociada

$$x_B = B^{-1}(b + \Delta b) \geq 0$$

la base seguirá siendo óptima si $B^{-1}b \geq -B^{-1}\Delta b$

■ **Variando c**

Suponiendo que tomamos $\tilde{c} = c + \Delta c$, como su solución asociada $u = c_B^t B^{-1}$ debe ser factible dual, es decir $A^t u \leq c$ se sigue que

I) Si c_i tal que $i \in B$ entonces $\Delta c_B^t B^{-1} N \leq \bar{c}_N$.

II) Si c_i tal que $i \notin B$ entonces $\Delta c_N \geq -\bar{c}_N$.

y la base sigue siendo óptima.

5.2. Programación lineal entera.

En esta sección se aborda el estudio del problema de optimización del tipo

$$\begin{aligned} \text{mín } c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \text{ entero} \end{aligned} \tag{5.3}$$

donde la condición “ x entero” no se puede escribir como restricción lineal aunque sí del tipo

$$\text{sen}(\pi x_i) = 0, \quad \forall i$$

Al exigir tal condición el conjunto de soluciones forma una malla contenida en \mathcal{P} que se conoce como retículo de X y que coincide con el conjunto $X = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$.

En adelante asumiremos que

$$\mathcal{P} = \{x / Ax \geq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

siendo A, b, c de coeficientes enteros y que $X = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ es el conjunto de soluciones enteras. Empezamos dando condiciones suficientes para que las soluciones al problema (5.3) sean enteras.

5.2.1. Unimodularidad.

Consideremos el problema (5.3) y supongamos que x^* es el óptimo. Entonces

$$x^* \text{ es entero} \iff B^{-1}b \text{ es entero con } B \text{ base asociada a } x^*$$

Considerando que

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}$$

siendo $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ con $M_{ij} \equiv$ menor de B tras eliminar la fila i y la columna j resulta claramente que si A, b, c son enteros se tiene que α_{ij} es entero y por tanto

$$(\det B = \pm 1 \implies x^* \text{ entero})$$

Teorema 5.2.1. *El conjunto convex(X) es un poliedro.*

Corolario 5.2.1. *Siempre es posible encontrar \tilde{A}, \tilde{b} tal que*

$$\min\{c^t x / x \in X\} = \min\{c^t x / \tilde{A}x \geq \tilde{b}, x \geq 0\}$$

Definición 5.2.1 (Matriz unimodular y totalmente unimodular). Una matriz $A \in M_{m,n}(\mathbb{Z})$ se dice que es **unimodular** cuando toda submatriz cuadrada de A , $Q \in M_m(\mathbb{Z})$ satisface que $\det Q \in \{-1, 0, 1\}$. Diremos que A es **totalmente unimodular** cuando toda submatriz cuadrada de A , $Q \in M_k(\mathbb{Z})$ con $1 \leq k \leq m$ verifica que $\det Q \in \{-1, 0, 1\}$.

Teorema 5.2.2. *Si A es unimodular y b es de coeficientes enteros entonces el poliedro*

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$$

tiene vértices enteros. Si además A es totalmente unimodular entonces dicho poliedro sólo tiene vértices enteros.

Proposición 5.2.1. *Sea A una matriz de coeficientes enteros. Entonces*

$$A \text{ es totalmente unimodular} \implies a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$$

Proposición 5.2.2. *Sea A una matriz tal que $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ y supongamos que*

- I) *toda columna de A tiene, a lo sumo, dos elementos no nulos*
- II) *existe una partición $[I_1, I_2]$ de las filas de A tal que cada columna que tenga dos elementos nulos, éstos caen en partes distintas de la partición.*

Entonces A es totalmente unimodular.

5.2.2. Cortes.

Definición 5.2.2 (Cortes válidos). Consideremos el problema $\min_{x \in \mathcal{P}} c^t x$ donde $\mathcal{P} = \{x / Ax = b, x \geq 0\}$. Una desigualdad $\alpha^t x \leq \alpha_0$ se dice **corte válido** para separar un x^* óptimo de las soluciones enteras de \mathcal{P} cuando

- I) $\alpha^t x \leq \alpha_0$ para cada $x \in X$, $X = \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$
- II) $\alpha^t x^* > \alpha_0$

Proposición 5.2.3 (Cortes de Chvátal). Sea x^* un punto extremo fraccionario de \mathcal{P} , entonces existe $u \in \mathbb{R}^m$ tal que la desigualdad $\alpha^t x \leq \alpha_0$ con $\alpha_j = \lfloor u^t A_j \rfloor$ y $\alpha_0 = \lfloor u^t b \rfloor$ es violada por x^*

Definición 5.2.3 (K-ésima cláusula de Chvátal). Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$. Se denomina **k-ésima cláusula de Chvátal** al conjunto

$$\mathcal{P}_k = \{x \in \mathbb{R}^n / A^{(1)}x \leq b^{(1)}, \dots, A^{(k)}x \leq b^{(k)}, Ax \leq b, x \geq 0\}$$

donde

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= \lfloor u^t A + u_1^t A^{(1)} + \dots + u_{k-1}^t A^{(k-1)} \rfloor \\ b^{(k)} &= \lfloor u^t b + u_1^t b^{(1)} + \dots + u_{k-1}^t b^{(k-1)} \rfloor \\ A^{(1)} &= \lfloor u^t A \rfloor \\ b^{(1)} &= \lfloor u^t b \rfloor \end{aligned}$$

Iterando existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaciendo que

$$\mathcal{P}_1 \supset \mathcal{P}_2 \supset \dots \supset \mathcal{P}_k = \text{convex}(X)$$

que se conoce como **rango de Chvátal** cuando $k = \min\{i \in \mathbb{N} / \mathcal{P}_i = \text{convex}(X)\}$

Proposición 5.2.4 (Cortes de Gomory). Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$ y supongamos $A = [B, N]$ con B base óptima siendo su solución asociada x^* fraccionaria, es decir, existe $x_h \in x_B$ fraccionario. Consideremos que está en la fila r -ésima de la tabla, que viene dada por

$$x_h + \sum_{j \in \mathbb{N}} \bar{a}_{rj} x_j = x_h^* \quad (5.4)$$

Esta ecuación corresponde a la forma $u^t Ax = u^t b$ tomando u^t la r -ésima fila de B^{-1} . Aplicando Chvátal resulta el **corte de Gomory**

$$x_h + \sum_{j \in \mathbb{N}} \lfloor \bar{a}_{rj} \rfloor x_j = \lfloor x_h^* \rfloor \quad (5.5)$$

que es una ecuación válida para X violada por x^* equivalente a

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi(\bar{a}_{rj}) x_j = \varphi(x_h^*), \quad \varphi(s) = s - \lfloor s \rfloor \geq 0$$

y que se obtiene restando a la ecuación (5.4), la ecuación (5.5)

Observación 5.2.1. En la práctica estos cortes son poco efectivos pues se trata de cortes débiles y para elegir adecuadamente la fila debemos tomar x_h^* de forma que

$$\varphi(x_h^*) = \text{máx}\{\varphi(x_i^*)/x_i^* \text{ fraccionario}\}$$

5.2.3. Ramificación.

Proposición 5.2.5 (Ramificación y acotación). Consideremos $ILP_1 = \text{mín}\{c^t x / Ax = b, x \geq 0, x \text{ entero}\}$ el problema inicial y supongamos x^* la solución óptima.

- I) Si $x^* \in \mathbb{Z}^n \implies \text{STOP}$
- II) Si $x^* \notin \mathbb{Z}^n \implies \exists h \in B/x_h^* \text{ fraccionario.}$

Construimos los subproblemas

$$ILP_2 = \text{mín}\{c^t x / Ax = b, x \geq 0, x_h \leq \lfloor x_h^* \rfloor\}$$

$$ILP_3 = \text{mín}\{c^t x / Ax = b, x \geq 0, x_h \geq \lfloor x_h^* \rfloor\}$$

que se denomina **ramificación**.

La operación de **acotación** consiste en resolver recursivamente los problemas ILP_2 e ILP_3 de igual manera que ILP_1 . En el peor de los casos este árbol decisional tiene n niveles y 2^n nodos. Para actualizar las soluciones dada en ILP_2 sobre ILP_1 comparamos los valores objetivo de cada una de ellas, esto es, si $x_{ILP_1}^*$ e $x_{ILP_2}^*$ son las soluciones óptimas de dichos problemas, entonces actualizaremos la solución actual (hasta ahora $x_{ILP_1}^*$) cuando

$$c^t x_{ILP_2}^* \leq c^t x_{ILP_1}^*$$

prosiguiendo análogamente con el resto de los nodos hasta que obtengamos una solución entera.

- **Técnicas para la selección del siguiente nodo a resolver.**

- I) **DEPTH FIRST:** Se avanza primero en profundidad.
- II) **BEST BOUND FIRST:** Se avanza eligiendo el nodo de menor cota.

Proposición 5.2.6 (Ramificación y corte). Esta técnica consiste en ramificar e introducir en cada subproblema buenos cortes con las técnicas mostradas anteriormente (Gomory o Chvátal) para elevar la cota del proceso.

Capítulo 6

Geometría Riemmaniana.

Este curso aborda el estudio de tópicos relacionados con las variedades de Riemman. Se distribuye en cuatro secciones que tratan los contenidos de variedades completas, espacios de curvatura constante y variaciones de la energía siendo la primera sección un estudio de las propiedades fundamentales de las variedades de Riemman.

El programa del curso se detalla a continuación:

6.1. Variedades de Riemman.

- 6.1.1. Variedades de Riemman.
- 6.1.2. Conexión afín.
- 6.1.3. Conexión de Riemman.
- 6.1.4. Geodésicas.
- 6.1.5. Curvatura de una variedad de Riemman.
- 6.1.6. Campos de Jacobi.

6.2. Variedades completas.

- 6.2.1. Introducción.
- 6.2.2. Variedades completas. Teorema de Hopf-Rinow.
- 6.2.3. Teorema de Hadamard.

6.3. Espacios de curvatura constante.

- 6.3.1. Introducción.
- 6.3.2. Teorema de Cartan.
- 6.3.3. Ejemplos. El espacio hiperbólico.
- 6.3.4. Formas espaciales.

6.4. Variaciones de la energía.

- 6.4.1. Introducción.
- 6.4.2. Fórmulas de la primera y segunda variación de la energía.
- 6.4.3. Aplicaciones.

6.1. Variedades de Riemman.

En esta sección haremos un breve resumen de algunos conceptos y resultados acerca de variedades de Riemman que serán utilizados en las secciones siguientes. Empezamos definiendo las variedades de Riemman.

6.1.1. Variedades de Riemman.

Sean M una variedad diferenciable de dimensión n . Recordemos que dado un campo de tensores g de tipo $(0,2)$ sobre M , para cada $x \in M$, g_x puede considerarse como una aplicación bilineal $g_x: T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ siendo g simétrico (análogo con definido positivo) si lo es g_x para cada $x \in M$.

Definición 6.1.1 (Variedad de Riemman). Una *variedad de Riemman* es una variedad diferenciable M dotada de un campo de tensores g de tipo $(0,2)$ simétrico y definido positivo que se denomina *metrica de Riemman*.

Si g es una métrica de Riemman y (U, x_1, \dots, x_n) una carta coordenada en M , entonces g en U se expresará por

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

siendo $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ por lo tanto para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ con $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}$ se tiene, tras operar, que

$$g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} X^i Y^j$$

Teniendo en cuenta que toda variedad diferenciable es paracompacta (al ser Hausdorff, localmente compacta y segundo contable) usando particiones de la unidad se tiene el siguiente resultado sobre la existencia de métricas de Riemman.

Teorema 6.1.1. *Toda variedad diferenciable admite una métrica de Riemman.*

Conocida la estructura matemática, se estudia la noción de equivalencia ocurriendo que dos variedades de Riemman son equivalentes cuando son isométricamente difeomorfas. Además podemos definir la longitud de una curva como

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g\left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right)} dt$$

donde $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ es una curva sobre la variedad M .

6.1.2. Conexión afín.

Sea M una variedad diferenciable, $\mathfrak{X}(M)$ el álgebra de los campos de vectores y $\mathfrak{F}(M)$ el anillo de las funciones diferenciables sobre M .

Definición 6.1.2 (Conexión afín). Una *conexión afín* (o lineal) ∇ sobre M es una aplicación $\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ que satisface las siguientes propiedades

$$\text{I) } \nabla_{fX+gZ}Y = f\nabla_XY + g\nabla_ZY$$

$$\text{II) } \nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$$

$$\text{III) } \nabla_XfY = f\nabla_XY + X(f)Y$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ y $f, g \in \mathfrak{F}(M)$.

De la tercera propiedad se deduce que una conexión es un operador local. Dado $p \in M$ y (U, x_1, \dots, x_n) una carta que pasa por p , si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, definidos como antes, entonces

$$\nabla_XY = \sum_{i,j} \left(X^i Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

por lo que poniendo

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}$$

donde Γ_{ij}^k son los *símbolos de Christoffel* de la conexión para dicha carta, resulta

$$\nabla_XY(p) = \sum_k \left(\sum_{i,j} X^i(p)Y^j(p)\Gamma_{ij}^k(p) + X(Y^k(p)) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (6.1)$$

por lo que resulta que $\nabla_XY(p)$ sólo depende del valor de X_p y del valor de Y a lo largo de una curva tangente a X en p .

Definición 6.1.3 (Derivada covariante). Dada una curva diferenciable $\gamma = \gamma(t)$, la *derivada covariante* a lo largo de γ , $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}X$, viene dada desde la expresión (6.1) mediante

$$\frac{DX}{dt} = \sum_k \left(\frac{dX^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{dx_i}{dt} X^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (6.2)$$

Por comodidad, también denotaremos a la derivada covariante de X respecto de γ por X' .

Definición 6.1.4 (Paralelismo). Un campo de vectores X a lo largo de una curva $\gamma: I \rightarrow M$, $\gamma = \gamma(t)$ es denominado *paralelo* si $\frac{DX}{dt} = 0$ para todo $t \in I$.

Proposición 6.1.1. Sea M una variedad diferenciable con una conexión ∇ . Consideremos $\gamma: I \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M y X_0 un vector tangente a M en $\gamma(t_0)$ para cierto $t_0 \in I$. Entonces existe un único campo de vectores paralelo X a lo largo de γ tal que $X(t_0) = X_0$.

6.1.3. Conexión de Riemman.

Sea (M, g) una variedad de Riemman y ∇ una conexión lineal sobre M .

Definición 6.1.5 (Conexión). La conexión ∇ se dice **compatible** con la métrica g si para toda curva diferenciable $\gamma = \gamma(t)$ y para cualquier par de campos de vectores $X = X(t)$ e $Y = Y(t)$ paralelos a lo largo de γ se tiene que $g(X, Y) = cte$

Esta definición se justifica en la proposición siguiente, en la que se establece que en las condiciones anteriores se puede derivar el producto interior por la usual “regla del producto”.

Proposición 6.1.2. Si (M, g) es una variedad de Riemman. Una conexión ∇ sobre M es compatible con la métrica g si y sólo si para cualquier par de campos de vectores X e Y a lo largo de la curva diferenciable $\gamma: I \rightarrow M$ se tiene

$$\frac{d}{dt}g(X, Y) = g\left(\frac{DX}{dt}, Y\right) + g\left(X, \frac{DY}{dt}\right)$$

Corolario 6.1.1. Una conexión ∇ sobre una variedad de Riemman (M, g) es compatible con la métrica si y sólo si

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_X Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

Definición 6.1.6 (Simetría). Una conexión lineal ∇ sobre una variedad diferenciable M se dice **simétrica** si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Si (U, x_1, \dots, x_n) es una carta coordenada sobre M y si Γ_{ij}^k denotan los símbolos de Christoffel de la conexión, entonces la condición de que ∇ es simétrica es equivalente a la condición $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Teorema 6.1.2. Dada una variedad de Riemman (M, g) existe una única conexión lineal ∇ sobre M verificando las condiciones

- I) ∇ es simétrica.
- II) ∇ es compatible con la métrica de Riemman.

Esta conexión se denomina **conexión de Riemman o Levi-Civita** y viene dada por la siguiente expresión que se denomina **fórmula de Koszul**

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(X, Z) - Zg(X, Y) + g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) - g([Y, Z], X)$$

De esta fórmula se obtiene además los símbolos de Christoffel en función de las g_{ij}

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right\}$$

6.1.4. Geodésicas.

Sea (M, g) una variedad de Riemman con conexión de Riemman asociada ∇ y sea $\gamma: I \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M .

Definición 6.1.7 (Geodésica). Se dice que γ es una **geodésica** si su campo de vectores tangente γ' es paralelo a lo largo de γ , esto es, $\frac{D}{dt}(\frac{d\gamma}{dt}) = 0$ para todo $t \in I$.

Si $\gamma = \gamma(t)$ es una geodésica, de la compatibilidad de ∇ con la métrica se deduce que $|\gamma'|$ es constante pues $\frac{d}{dt}g(\gamma', \gamma') = 0$.

Proposición 6.1.3. Sea (U, x_1, \dots, x_n) y $\gamma: I \rightarrow M$ una curva contenida en U (es decir, $\gamma(I) \subset U$ con $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$). Entonces γ es una geodésica de M si y sólo si sus funciones componentes $x_k(t) = x_k \circ \gamma(t)$ satisfacen

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (6.3)$$

Del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias se siguen los siguientes resultados locales.

Proposición 6.1.4. Si $v \in T_p(M)$, entonces existe un intervalo alrededor del 0 de \mathbb{R} y una única geodésica $\gamma_v: I \rightarrow M$ tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$. Además, γ_v depende diferenciablemente de las condiciones iniciales p y v .

Proposición 6.1.5. Sea $v \in T_p(M)$. Entonces existe un entorno \mathcal{N} de v en $T_p(M)$ y un intervalo I alrededor del origen de \mathbb{R} tal que la aplicación

$$\Phi: \mathcal{N} \times I \rightarrow M, \quad \Phi(w, t) = \gamma_w(t)$$

está bien definida y es diferenciable.

En lo que sigue, por comodidad, tomaremos el intervalo $I = [0, a]$, observando que si $x = x(t)$ es una solución de (6.3) definida en I , también lo es $x(\lambda t)$ para cualquier constante $\lambda \in \mathbb{R}$. Si γ_v está definida en I , entonces, como

$$\gamma_{\lambda v}\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \gamma_v(t), \quad \lambda \in \mathbb{R}, t \in [0, a] \quad (6.4)$$

se sigue que $\gamma_{\lambda v}$ está definida en $[0, \frac{a}{\lambda}]$.

Por otra parte dado que γ_v depende diferenciablemente de v , y el conjunto $\{v \in T_p(M) / |v| = 1\}$ es compacto, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para $|v| = 1$, γ_v está definida al menos sobre $[0, \varepsilon]$. Por tanto, para $w \in T_p(M)$ con $|w| \leq \varepsilon$, γ_w está definida, al menos, en $[0, 1]$.

Denotemos por

$$D_p = \{v \in T_p(M) / \gamma_v \text{ está definida sobre } [0, 1]\}$$

Definición 6.1.8 (Aplicación exponencial). La *aplicación exponencial* de M en p es la aplicación $exp_p: D_p \rightarrow M$ dada por $exp_p(v) = \gamma_v(1)$ siendo claro que D_p es el mayor subconjunto de $T_p(M)$ donde exp_p puede ser definida. Además dado $v \in D_p$, si $tv \in D_p$, entonces de (6.4) se sigue que $exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$ de lo que se deduce que la aplicación exp_p transforma rectas que pasan por el origen en $T_p(M)$ en geodésicas sobre M que pasan por el punto p .

Proposición 6.1.6. Para cada punto $p \in M$ existe un entorno abierto \mathcal{W}_p del 0 en $T_p(M)$ sobre el cual la aplicación exponencial exp_p es un difeomorfismo sobre un entorno abierto U de p en M .

Antes de definir el concepto de entorno normal, recordemos que un subconjunto S de un espacio vectorial V se dice *estrellado* alrededor de 0 de V si para todo $v \in S$ se tiene que $tv \in S$, para todo $0 \leq t \leq 1$

Definición 6.1.9 (Entorno normal). Sean \mathcal{W}_p y U los entornos abiertos de la proposición anterior. Si \mathcal{W}_p es estrellado alrededor del 0 en $T_p(M)$, entonces se dice que U es un *entorno normal* de p en M .

Es claro que dado cualquier $p \in M$ podemos encontrar un entorno normal de p (en particular cuando \mathcal{W}_p es una bola abierta, U es normal).

Proposición 6.1.7. Si U es un entorno normal de $p \in M$, entonces para cada $y \in U$, existe una única geodésica $\sigma: [0, 1] \rightarrow U$ de p a y . Además $\sigma'(0) = exp_p^{-1}(y) \in \mathcal{W}_p$.

Proposición 6.1.8. Sea $p \in M$ y U_p un entorno normal de p . Sea $\gamma: [0, 1] \rightarrow U$ un segmento de geodésica con $\gamma(0) = p$. Si $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ es cualquier curva diferenciable a trozos que une $\gamma(0)$ con $\gamma(1)$, entonces $L(\gamma) \leq L(\alpha)$ y si se satisface la igualdad se sigue que $\gamma([0, 1]) = \alpha([0, 1])$.

Teorema 6.1.3. Para cualquier $p \in M$ existe un entorno U de p tal que dado $y \in U$ existe un entorno estrellado \mathcal{W}_y del 0 en $T_y(M)$ y un entorno U_y tal que la exponencial $exp_y: \mathcal{W}_y \rightarrow U_y$ es un difeomorfismo y $U \subset U_y$ (es decir, U es entorno normal de todos sus puntos).

De estos resultados se sigue que si U es entorno normal de todos sus puntos, dados $x, y \in U$ existe una única geodésica γ que los une y que minimiza la longitud. Además se tiene que

Corolario 6.1.2. Si una curva diferenciable a trozos $\gamma: [a, b] \rightarrow M$, con parámetro proporcional a la longitud de arco, tiene longitud menor o igual que la longitud de cualquier otra curva diferenciable a trozos que une $\gamma(a)$ con $\gamma(b)$, entonces γ es geodésica. En particular, γ es regular.

6.1.5. Curvatura de una variedad de Riemman.

Sea (M, g) una variedad de Riemman con conexión de Riemman ∇ .

Definición 6.1.10 (Tensor de curvatura). Se denomina *tensor de curvatura* (o simplemente, *curvatura*) de M al campo de tensores R de tipo $(1,3)$

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$(X, Y, Z) \mapsto R(X, Y)Z$$

dado por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$

El tensor anterior, R mide el hecho de que una variedad sea o no euclídea. Si (U, x_1, \dots, x_n) es un sistema de coordenadas sobre M entonces,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_k} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

con lo que también mide cuándo se puede invertir el orden de derivación.

Proposición 6.1.9. Si $W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces se tiene que

- I) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$
- II) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
- III) $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$
- IV) $g(R(X, Y)Z, W) = g(R(Z, W)X, Y)$

Si (U, x_1, \dots, x_n) es un sistema de coordenadas sobre M , el tensor de curvatura R se podrá poner, en coordenadas, como

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_r}\right) \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n R_{jkr}^i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Las funciones R_{jkr}^i se denominan componentes de R en la carta dada. Si Γ_{ij}^k denotan los símbolos de Christoffel de la conexión de Riemman se sigue que

$$R_{jkr}^i = \frac{\partial \Gamma_{rk}^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x_r} + \sum_{s=1}^n (\Gamma_{rj}^s \Gamma_{ks}^i - \Gamma_{kj}^s \Gamma_{rs}^i)$$

Así, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$, entonces

$$R(X, Y)Z = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k,r,j=1}^n X^k Y^r Z^j R_{jkr}^i \right) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Consideremos ahora p un punto cualquiera de M y $\pi \subset T_p(M)$ un subespacio bidimensional (un plano) del espacio tangente $T_p(M)$.

Definición 6.1.11 (Curvatura seccional). Se denomina *curvatura seccional* del plano π al escalar

$$K_p(\pi) = K_p(X, Y) = -\frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

donde $\{X, Y\}$ es una base cualquiera del plano π .

Se comprueba que la definición no depende de la base elegida del plano.

Definición 6.1.12 (Curvatura seccional constante). Sea (M, g) una variedad de Riemman y $k \in \mathbb{R}$. Diremos que M tiene *curvatura seccional constante* k si $K_p(\pi) = k$, para todo $p \in M$ y todo plano $\pi \subset T_p(M)$.

Proposición 6.1.10. Si (M, g) es una variedad de Riemman de curvatura constante k entonces

$$g(R(X, Y)Z, W) = k(g(X, W)g(Y, Z) - g(X, Z)g(Y, W))$$

para todos $p \in M$ y $X, Y, Z, W \in T_p(M)$

Para finalizar, si $\{E_1, \dots, E_n\}$ es una base (local) ortonormal de campos de vectores, su *curvatura escalar* viene dada por

$$r = \sum_{i,j=1}^n g(R(E_i, E_j)E_j, E_i)$$

Definición 6.1.13 (Tensor de Ricci). En las condiciones de antes, el *tensor de Ricci* es el campo de tensores simétrico de tipo (1,1) dado, localmente, por

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

6.1.6. Campos de Jacobi.

Sea (M, g) es una variedad de Riemman y $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una curva diferenciable sobre M .

Definición 6.1.14 (Variación diferenciable.). Una *variación diferenciable* de γ es una aplicación diferenciable $f: [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $(t, s) \mapsto f(t, s)$ verificando que $f(t, 0) = \gamma(t)$. Diremos además que es *propia* cuando $f(0, s) = \gamma(0)$ y $f(a, s) = \gamma(a)$ para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, la curva paramétrica dada por $f_s(t) = f(t, s)$ se denomina *curva de variación* de γ . Resulta ser propia cuando todas las curvas tienen igual punto inicial y final, dados por $\gamma(0)$ y $\gamma(a)$ respectivamente.

Las curvas paramétricas $f: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ dadas por $f_t(s) = f(t, s)$ se denominan *curvas transversales*. El campo de vectores $V(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$ se conoce como *campo varicional* de f .

Proposición 6.1.11. Sea (M, g) una variedad de Riemman con conexión de Riemman ∇ y derivada covariante asociada D . Si $f = f(t, s)$ es una variación diferenciable de una curva γ , entonces

$$\frac{D}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(t, s) = \frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s)$$

Consideremos ahora $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ un segmento de geodésica sobre M .

Definición 6.1.15 (Variación geodésica). Una variación diferenciable de una curva γ , $f: [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $f = f(t, s)$ se dice que es una **variación geodésica** si para cada $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ la curva $f_s(t) = f(t, s)$ es una geodésica. En este caso, denotaremos por J al campo variacional de f , esto es, $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0) = f_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{(t, 0)} \right)$.

Proposición 6.1.12. Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica sobre M y $f: [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variación geodésica de γ . Entonces, el campo variacional $J = J(t)$ satisface que

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0$$

Definición 6.1.16 (Campo de Jacobi). Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica sobre M . Un campo de vectores J a lo largo de γ se dice **campo de Jacobi** si satisface

$$\frac{D^2 J}{dt^2}(t) + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0 \tag{6.5}$$

para todo $t \in [0, a]$.

Se prueba que todo campo de Jacobi queda determinado por sus valores iniciales, esto es, $V(0)$ y $\frac{DJ}{dt}(0)$ dado en la siguiente proposición.

Proposición 6.1.13. Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica sobre M . dos vectores $v, w \in T_{\gamma(0)}(M)$, existe un único campo de Jacobi J a lo largo de γ tal que $J(0) = v$ y $\frac{DJ}{dt}(0) = w$.

Corolario 6.1.3. El conjunto de los campos de Jacobi sobre una geodésica $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ constituyen un espacio vectorial real de dimensión $2n$.

Proposición 6.1.14. Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica sobre M y J un campo de Jacobi a lo largo de γ . Entonces existe una variación geodésica de γ , $f: [0, a] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, tal que J es el campo variacional de f , es decir $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t, 0)$

Corolario 6.1.4. Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica que pasa por $p \in M$ para $t = 0$, es decir, $\gamma(t) = \exp_p(t\gamma'(0))$. Entonces fijado $w \in T_p(M)$, el campo de Jacobi J a lo largo de γ con $J(0) = 0$ y $J'(0) = w$ viene dado por $J(t) = (\exp_p)_*|_{t\gamma'(0)}(tw)$

Definición 6.1.17 (Puntos conjugados y multiplicidad). Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica y $t_0 \in (0, a]$. El punto $\gamma(t_0)$ se dice que es **conjugado** con $\gamma(0)$, a lo largo de γ , si existe un campo de Jacobi a lo largo de γ , no idénticamente nulo, con $J(0) = 0 = J(t_0)$. El número máximo de tales campos linealmente independientes es denominado **multiplicidad** del punto conjugado $\gamma(t_0)$

Proposición 6.1.15. *Sea $\gamma: [0, a] \rightarrow M$ una geodésica y pongamos $\gamma(0) = p$. El punto $q = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (0, a]$ es conjugado de p a lo largo de γ si y sólo si $v_0 = t_0\gamma'(0)$ es un punto crítico de \exp_p . Además, la multiplicidad de q es igual a la dimensión del núcleo de la aplicación lineal $(\exp_p)_{*|v_0}$.*

6.2. Variedades completas.

6.2.1. Introducción.

En la sección anterior hemos estudiado las propiedades locales de las variedades de Riemman. Sin embargo, uno de los aspectos más interesantes de la geometría diferencial es la relación existente entre las propiedades locales y las globales de una variedad de Riemman. Por propiedad local entendemos a aquélla que sólo depende del comportamiento de la variedad en el entorno de un punto, y por propiedad global a aquélla que depende del comportamiento de la variedad considerada como un todo. Este tema inicia el estudio de estos aspectos. Primero, definimos el “hábitat” natural de las propiedades globales: las variedades de Riemman completas, que son aquellas variedades de Riemman (M, g) en las que las geodésicas están definidas para todos los valores de t , es decir, que para todo $p \in M$, \exp_p está definida en todo $T_p(M)$. Salvo que se diga lo contrario, en adelante supondremos que todas las variedades son conexas.

6.2.2. Variedades completas. Teorema de Hopf-Rinow.

Lo primero es, si vamos a estudiar propiedades globales de una variedad diferenciable M , garantizar que M no es una subvariedad abierta propia de una variedad M' . La condición usual para garantizar esta no-extendibilidad es la compacidad.

Definición 6.2.1 (Extendibilidad). Una variedad de Riemman M es *extendible* si existe una variedad de Riemman M' tal que M es isométrica a un subconjunto abierto y propio de M' . En caso contrario, se dice que M es *no-extendible*.

Definición 6.2.2 (Variedad completa). Una variedad de Riemman M es *(geodésicamente) completa* si para todo $p \in M$, la aplicación \exp_p está definida para todo $v \in T_p(M)$, es decir, si cualquier geodésica que parta de p está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Proposición 6.2.1. *Si M es completa entonces M no es extendible.*

Observación 6.2.1. El recíproco no es cierto. La clase de las variedades completas está estrictamente contenida en la clase de las variedades no extendibles.

Sea ahora (M, g) una variedad de Riemman. Dados dos puntos $p, q \in M$, consideremos el conjunto $\mathcal{C}(p, q)$ de todas las curvas diferenciables a trozos en M que unen p con q .

Definición 6.2.3 (Distancia). La *distancia* (de Riemman) entre p y q viene dada por

$$d(p, q) = \inf_{\alpha \in \mathcal{C}(p, q)} L(\alpha)$$

Proposición 6.2.2. Con la distancia d , M es un espacio métrico cuya topología inducida coincide con la topología original de M .

Corolario 6.2.1. Si $p_0 \in M$, la función $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(p) = d(p, p_0)$ es continua.

Teorema 6.2.1 (Teorema de Hopf-Rinow). Si (M, g) es una variedad de Riemman y $p \in M$. Entonces son equivalentes

- I) \exp_p está definida sobre todo $T_p(M)$.
- II) Todo subconjunto cerrado y acotado de M es compacto.
- III) M es un espacio métrico completo.
- IV) M es geodésicamente completo.

Además cualquiera de las condiciones anteriores implica

- v) Dado cualquier $q \in M$ existe una geodésica γ que une p con q y $L(\gamma) = d(p, q)$.

Corolario 6.2.2. Si M es compacta entonces M es completa.

Corolario 6.2.3. Una subvariedad cerrada de una variedad de Riemman completa es completa con la métrica inducida. En particular las subvariedades cerradas de un espacio euclídeo son completas.

6.2.3. El Teorema de Hadamard.

Como aplicación del Teorema de Hopf-Rinow se obtiene el Teorema de Hadamard. Para verlo, daremos antes unos resultados previos necesarios. Dada una variedad de Riemman (M, g) y $p \in M$ denotamos por $C(p)$ al conjunto de puntos conjugados con p . Es decir, $q \in C(p)$ si existe una geodésica γ que une p con q (pongamos $p = \gamma(a)$ y $q = \gamma(b)$) y un campo de Jacobi a lo largo de γ , no idénticamente nulo, tal que $J(a) = J(b) = 0$

Sean M y \widetilde{M} dos variedades de la misma dimensión y $\pi: \widetilde{M} \rightarrow M$ una aplicación diferenciable.

Definición 6.2.4 (Variedad recubridora). Se dice que \widetilde{M} es una *variedad recubridora* de M con aplicación recubridora π si

- I) π es sobreyectiva (suponemos \widetilde{M} conexa).

- II) Cada $p \in M$ tiene un entorno conexo U (denominado entorno distinguido de p) tal que $\pi^{-1}(U) = \cup_{\alpha} V_{\alpha}$, donde V_{α} son abiertos disjuntos dos a dos con la propiedad de que $\pi|_{V_{\alpha}}$ es un difeomorfismo sobre U ($\pi|_{V_{\alpha}}: V_{\alpha} \rightarrow U$).

Si $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ es una aplicación de recubrimiento y (M, g) es una variedad de Riemman entonces existe una única métrica de Riemman sobre M tal que π es una isometría local. Efectivamente, basta considerar $\tilde{g} = \pi^*g$

Teorema 6.2.2 (Hadamard). *Sea M una variedad de Riemman completa, simplemente conexa con curvatura seccional $K(p, \pi) \leq 0$, para todo $p \in M$ y $\pi \subset T_p(M)$. Entonces M es difeomorfo a \mathbb{R}^n y por tanto $\dim M = n$; más precisamente $\exp_p: T_p(M) \rightarrow M$ es un difeomorfismo.*

6.3. Espacios de curvatura constante.

6.3.1. Introducción.

Las variedades de Riemman con curvatura seccional constante son las más sencillas y están relacionadas con las geometrías clásicas no euclídeas habiendo sido utilizadas en los primeros modelos cosmológicos.

Una propiedad importante de estos espacios es que poseen un número suficientemente grande de isometrías locales y siempre es posible “desplazar” dos triángulos pequeños para decidir si se puede superponerlos. Esta propiedad de “libre movilidad” es fundamental en las construcciones de la geometría elemental y fue considerada como postulado a cumplir en las geometrías no euclídeas.

No es difícil comprobar que si multiplicamos una métrica de Riemman por una constante positiva c , sus curvaturas seccionales son multiplicadas por $\frac{1}{c}$ con lo que, salvo semejanza, podemos asumir que los valores de la curvatura seccional de una variedad de curvatura constante son $-1, 0$ ó 1 .

6.3.2. Teorema de Cartan.

Sean (M, g) y (\tilde{M}, \tilde{g}) dos variedades de Riemman de la misma dimensión n , y $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Sea $i: T_p(M) \rightarrow T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ una isometría lineal. Sea $V \subset M$ un entorno normal de p tal que la aplicación $\exp_{\tilde{p}}$ esté definida en $i \circ \exp_p^{-1}(V)$. Es decir, si $\exp_p: B \rightarrow V$ siendo $B = \exp_p^{-1}(V)$ con $\exp_{\tilde{p}}: \tilde{B} \rightarrow \tilde{M}$ suponemos que $i(B) \subset \tilde{B}$.

Definimos la aplicación $f: V \rightarrow \tilde{M}$ por

$$f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q), \quad q \in V$$

Buscaremos condiciones suficientes para que f sea isometría local.

Para todo $q \in V$, existe una geodésica normalizada $\gamma: [0, t] \rightarrow M$, con $\gamma(0) = p$ y $\gamma(t) = q$. Denotamos por P_t al transporte paralelo a lo largo de γ desde $\gamma(0)$ hasta $\gamma(t)$, es decir, $P_t: T_p(M) \rightarrow T_q(M)$, $v \mapsto P_t(v) = V(t)$ donde $V = V(t)$ es el único campo de vectores paralelo a lo largo de γ tal que $V(0) = v$.

Definimos la aplicación $\Phi_t: T_q(M) \rightarrow T_{f(q)}(M)$ por

$$\Phi_t(v) = \tilde{P}_t \circ i \circ P_t^{-1}(v), v \in T_q(M)$$

donde \tilde{P}_t es el transporte paralelo a lo largo de la geodésica normalizada $\tilde{\gamma}: [0, t] \rightarrow \tilde{M}$ dada por $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ y $\tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$. Indicamos finalmente por R y \tilde{R} las curvaturas de M y \tilde{M} respectivamente. Se tiene,

Teorema 6.3.1. *Si para todo $q \in V$ y $X, Y, U, V \in T_q(M)$ se tiene que*

$$g(R(X, Y)U, V) = \tilde{g}(\tilde{R}(\phi_t(X), \phi_t(Y))\phi_t(U), \phi_t(V))$$

entonces se tiene que $f: V \rightarrow f(V) \subset \tilde{M}$ es una isometría local y $f_{*|_p} = i$.

Corolario 6.3.1. *Sean M y \tilde{M} dos variedades de igual dimensión con curvaturas seccionales constantes e iguales ($k = \tilde{k}$). Sean $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ y $\{e_j\} \subset T_p(M)$, $\{\tilde{e}_j\} \subset T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ con $j = 1, \dots, n$ bases ortonormales. Entonces existe un entorno $V \subset M$ de p , un entorno $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ de \tilde{p} y una isometría $f: V \rightarrow \tilde{V}$ tal que $f_{*|_p}(e_i) = \tilde{e}_i$.*

Corolario 6.3.2. *Sea M una variedad de curvatura constante y $p, q \in M$. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $\{f_1, \dots, f_n\}$ dos bases ortonormales de $T_p(M)$ y $T_q(M)$ respectivamente. Entonces existe un entorno U de p , un entorno V de q y una isometría $g: U \rightarrow V$ tal que $g_{*|_p}(e_j) = f_j$.*

6.3.3. Ejemplos.

El espacio euclídeo \mathbb{R}^n . Consideramos sobre \mathbb{R}^n la métrica Euclídea. Se obtiene que en este caso el tensor de curvatura es idénticamente nulo por lo que se sigue que \mathbb{R}^n es una variedad con curvatura seccional nula, es decir, $K(p, \pi) = 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^n$ y todo plano $\pi \subset T_p(\mathbb{R}^n)$.

La esfera $S^n(r)$. La esfera $S^n(r) = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} / \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es una subvariedad orientable de \mathbb{R}^{n+1} . Se prueba que $S^n(r)$ con la métrica inducida de la euclídea de \mathbb{R}^{n+1} es una variedad con curvatura seccional constante, $K = \frac{1}{r^2}$ y que la conexión canónica D (derivada covariante) en \mathbb{R}^{n+1} induce la conexión de Riemman ∇ de $S^n(r)$, la cual se relaciona con D a través de la fórmula de Gauss

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ siendo h la segunda forma fundamental sobre S^n

El espacio hiperbólico H^n . El espacio hiperbólico H^n es una generalización, a dimensión $n \geq 2$, del semiplano de Poincaré. Viene dado por

$$H^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_n > 0\}$$

dotado con la métrica

$$g = \frac{1}{x_n^2}(dx_1^2 + \dots + dx_n^2)$$

Es claro que H^n es simplemente conexo. Se obtiene que (H^n, g) es un espacio de curvatura seccional constante igual a -1 previo cálculo de los símbolos de Christoffel para la métrica y calculando las componentes del tensor R_{jkr}^i con las relaciones de la sección 6.1.5

Las geodésicas de H^n son las rectas perpendiculares al hiperplano $x_n = 0$ y los semicírculos de H^n contenidos en planos perpendiculares al hiperplano anterior y con centro en dicho hiperplano de lo que se sigue que H^n es completo al poderse prolongar indefinidamente cualquier geodésica de él.

6.3.4. Formas espaciales.

En esta sección probaremos que las únicas variedades de Riemann simplemente conexas y completas de curvatura seccional constante son \mathbb{R}^n , S^n y H^n . Enunciamos primero un lema que se usa en la prueba del resultado principal.

Lema 6.3.1. Sean $f_i: M \rightarrow N$ $i = 1, 2$ dos isometrías locales entre las variedades de Riemann M y N (suponemos M conexa). Supongamos que existe un punto $p \in M$ tal que $f_1(p) = f_2(p)$ y $f_{1*|_p} = f_{2*|_p}$. Entonces $f_1 = f_2$.

Teorema 6.3.2. Sea M^n una variedad de Riemann completa y de curvatura seccional constante K . Entonces el recubrimiento universal con la métrica de recubrimiento es isométrico a

- I) H^n si $K = -1$.
- II) \mathbb{R}^n si $K = 0$.
- III) S^n si $K = 1$.

Las variedades completas con curvatura seccional constante se denominan **formas espaciales**.

6.4. Variaciones de la energía.

6.4.1. Introducción.

En este tema presentaremos una caracterización de las geodésicas como “soluciones de un problema variacional”. Para ello introduciremos ciertas ideas que son adaptaciones, para la Geometría Diferencial, de conceptos y técnicas del Cálculo Variacional.

6.4.2. Fórmulas de la primera y segunda variación de la energía.

Para comenzar recordaremos el concepto de variación que nos permitirá comparar el comportamiento de una curva dada con el de curvas próximas a ella. Sea M una variedad diferenciable y $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ un segmento de curva diferenciable a trozos sobre M .

Definición 6.4.1 (Variación diferenciable). Una *variación* de α es una aplicación continua $f: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ verificando

$$I) f(t, 0) = \alpha(t)$$

II) Existe una subdivisión de $[a, b]$ por puntos $a = t_0 < \dots < t_{k+1} = b$ tal que la restricción de f a cada $[t_i, t_{i+1}] \times (-\delta, \delta)$ es diferenciable, para cada $i = 0, \dots, k$.

Una variación se dice *propia* si $f(a, s) = \alpha(a)$ y $f(b, s) = \alpha(b)$, para todo $s \in (-\delta, \delta)$. Si f es diferenciable se dice que la variación es *diferenciable*.

Obsérvese que $\frac{\partial f}{\partial s}(t, s)$ para todo (t, s) del rectángulo y que está definido de modo unívoco salvo en los puntos (t_i, s) . Escribiremos $\frac{\partial f}{\partial s}(t_i^-, s)$ cuando consideremos $t_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y $\frac{\partial f}{\partial s}(t_i^+, s)$, cuando $t_i \in [t_i, t_{i+1}]$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Fijado un valor del intervalo $s \in (-\delta, \delta)$ obtenemos una curva diferenciable a trozos $f_s: [a, b] \rightarrow M$ que se conoce como *curva longitudinal* de la variación. Análogamente, fijando $t \in [a, b]$ obtenemos una curva diferenciable a trozos $f_t: (-\delta, \delta) \rightarrow M$ que se conoce como *curva transversal* de la variación.

Si para una variación f de α calculamos el vector velocidad de cada curva transversal $f_t(s)$ en el valor 0 obtenemos un campo de vectores $V: [a, b] \rightarrow T(M)$ a lo largo de α dado por $V(t) = f_t'(0) = \frac{\partial f}{\partial s}|_{(t,0)}$ y que se conoce como *campo variacional* de f .

Cuando toda curva longitudinal de una variación es geodésica, se dice que tenemos una *variación geodésica*.

Proposición 6.4.1. Dado un campo diferenciable a trozos $V = V(t)$ a lo largo de una curva $\alpha: [a, b] \rightarrow M$, diferenciable a trozos, existe una variación $f: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ de α , tal que su campo variacional es V . Además, si $V(a) = 0 = V(b)$ es posible elegir f de forma que sea una variación propia.

Un problema básico en geometría riemanniana es medir el cambio de longitud de arco de un segmento de curva bajo desplazamientos pequeños. Para comparar la longitud de un segmento de curva de $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ con la longitud de las curvas próximas en una variación $f: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ definimos la función

$$L: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L(s) = \int_a^b \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\| dt$$

Sin embargo para nuestros propósitos es más conveniente estudiar la **función energía**

$$E: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(s) = \frac{1}{2} \int_a^b g \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, s), \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) \right) dt$$

Antes de continuar necesitamos algunos hechos generales acerca de la función energía. Consideremos una curva $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ y sean

$$L(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\| dt, \quad E(\alpha) = \frac{1}{2} \int_a^b g \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s), \frac{\partial \alpha}{\partial t}(t, s) \right) dt$$

Nótese que la longitud de la curva no depende de la parametrización elegida para dicha curva pero la energía de la curva sí. Considerando la desigualdad de Cauchy-Schwartz con el producto escalar $\langle h, g \rangle = \int_a^b h g dt$ para $\|h\| = 1$ y $g = \left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\|$ resulta

$$(L(\alpha))^2 \leq 2(b-a)E(\alpha)$$

satisfaciéndose la igualdad si y sólo si $\left\| \frac{d\alpha}{dt} \right\| = K$, es decir, si y sólo si t es proporcional a la longitud de arco.

Lema 6.4.1. Sean $p, q \in M$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica minimizante uniendo $\gamma(a) = p$ con $\gamma(b) = q$. Entonces para toda curva $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ diferenciable a trozos que una $\alpha(a) = p$ con $\alpha(b) = q$ se tiene que

$$E(\gamma) \leq E(\alpha)$$

dándose la igualdad si y sólo si α es geodésica minimizante.

Proposición 6.4.2 (Primera variación de la energía de una curva). Sea $\alpha: [a, b] \rightarrow M$ una curva diferenciable a trozos en M y $f: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ una variación de α . Si $E: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función energía, entonces

$$E'(0) = - \int_a^b g \left(V, \frac{D\alpha'}{dt} \right) dt + g(V(b), \alpha'(b)) - g(V(a), \alpha'(a)) \\ - \sum_{i=1}^k g(V(t_i), \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-))$$

donde $V = V(t)$ es el campo variacional de f .

Una aplicación inmediata de la fórmula de la primera variación de la energía es la siguiente caracterización de geodésicas

Proposición 6.4.3. *Una curva diferenciable a trozos $\alpha: I \rightarrow M$ es una geodésica si y sólo si para toda variación propia de α se tiene que $\frac{dE}{ds}(0) = 0$*

Observación 6.4.1. La proposición anterior suministra una caracterización de las geodésicas como puntos críticos de la energía siendo las geodésicas soluciones de un problema variacional y con carácter global, no local.

Proposición 6.4.4 (Segunda variación de la energía de una geodésica). *Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ una geodésica en M y $f: [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$ una variación de γ . Si $E: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ es la función energía de la variación, entonces*

$$\begin{aligned} E''(0) = & - \int_a^b g \left(V, \frac{D^2V}{dt^2} + R(V, \gamma')\gamma' \right) dt \\ & - \sum_{i=1}^k g \left(V(t_i), \frac{DV}{dt}(t_i^+) - \frac{DV}{dt}(t_i^-) \right) \\ & + g \left(V(b), \frac{DV}{dt}(b) \right) - g \left(V(a), \frac{DV}{dt}(a) \right) \\ & + g \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(b, 0), \gamma'(b) \right) - g \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(a, 0), \gamma'(a) \right) \end{aligned}$$

donde $V = V(t)$ es el campo variacional de f y R es la curvatura de M .

Observación 6.4.2. Muchas veces es conveniente escribir la fórmula de la segunda variación de la energía en la “forma índice” dada por

$$\begin{aligned} E''(0) = & I_\gamma(V, V) \\ & + g \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(b, 0), \gamma'(b) \right) - g \left(\frac{D}{ds} \frac{\partial f}{\partial s}(a, 0), \gamma'(a) \right) \end{aligned}$$

donde $I_\gamma(V, V) = \int_a^b \left\{ g \left(\frac{DV}{dt}, \frac{DV}{dt} \right) - g(R(\gamma', V)V, \gamma') \right\} dt$

6.4.3. Aplicaciones. Teorema de Bonnet-Myers y teorema de Synge-Weinstein.

Teorema 6.4.1 (Teorema de Bonnet-Myers). *Sean M^n una variedad de Riemman completa. Supongamos que la curvatura de Ricci satisface*

$$\text{Ric}_p(\vec{v}, \vec{v}) \geq \frac{n-1}{r^2} g_p(\vec{v}, \vec{v})$$

para todo $p \in M$ y $v \in T_p(M)$. Entonces M es compacta y el diámetro de M es menor o igual que πr .

Corolario 6.4.1. Sean M^n una variedad de Riemman completa. Supongamos que la curvatura de Ricci satisface

$$\text{Ric}_p(\vec{v}, \vec{v}) \geq \frac{n-1}{r^2} g_p(\vec{v}, \vec{v})$$

para todo $p \in M$ y $v \in T_p(M)$. Entonces el recubrimiento universal de M es compacto. En particular, el grupo fundamental de M es finito.

Corolario 6.4.2. Sean M^n una variedad de Riemman completa con curvatura seccional K satisfaciendo que

$$K_p(\vec{v}, \vec{w}) \geq \frac{1}{r^2} > 0$$

para todo $p \in M$ y $v, w \in T_p(M)$. Entonces M es compacta, el diámetro de M es menor o igual que πr y el grupo fundamental de M es finito.

Teorema 6.4.2 (Teorema de Weinstein). Sea $F: M \rightarrow M$ una isometría con M^n variedad de Riemman orientada y compacta. Supongamos que M tiene curvatura seccional positiva y que, si n es par, F preserva la orientación de M y si n es impar, F invierte la orientación de M . Entonces F tiene un punto fijo.

Teorema 6.4.3 (Teorema de Synge). Sea M^n una variedad compacta, orientable, de dimensión par y con curvatura seccional positiva. Entonces M es simplemente conexa.

Corolario 6.4.3. Sea M^n una variedad compacta de dimensión impar con curvatura seccional positiva. Entonces M es orientable.

Observación 6.4.3. Es fundamental la orientabilidad en el teorema de Synge pues el espacio proyectivo de dimensión dos es compacto, no orientable y no simplemente conexo.

Capítulo 7

Geometría diferencial de variedades II.

En este curso se estudiarán las condiciones necesarias para definir una estructura geométrica en una variedad. Para ello, primero, estableceremos unos resultados básicos acerca de la diferenciabilidad en \mathbb{R}^n (incluyendo la derivada covariante) así como sobre las conexiones lineales sobre una variedad para concluir con el estudio de los subespacios horizontales \mathcal{H} del espacio tangente $T M = \bigcup_{x \in M} T_x M$ de una variedad M . También se realizará un estudio análogo sobre el fibrado de las referencias en \mathbb{R}^n .

El programa del curso se detalla a continuación:

7.1. Introducción al cálculo diferencial en \mathbb{R}^n .

7.1.1. Diferenciación en \mathbb{R}^n .

7.1.2. Derivada covariante en \mathbb{R}^n .

7.2. Conexión lineal sobre una variedad.

7.2.1. Enfoque axiomático.

7.2.2. Enfoque tensorial o clásico.

7.2.3. Conexiones definidas por caminos.

7.2.4. Enfoque por fibrados.

7.2.4.1. Transporte paralelo definido por una distribución horizontal en $L(M)$.

7.2.4.2. Distribución horizontal en $T(M)$ definida por una distribución horizontal en $L(M)$.

7.1. Introducción al cálculo diferencial en \mathbb{R}^n .

7.1.1. Diferenciación en \mathbb{R}^n .

Sea una función $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $U^{abto} \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que F es diferenciable en $p \in U$ si existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tal que para cada $v \in \mathbb{R}^n$

$$F(p+v) = F(p) + T(v) + \|v\| \cdot \varepsilon(v)$$

donde $\varepsilon(v) \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$, o equivalentemente si se satisface que

$$\lim_{v \rightarrow 0} \frac{\|F(p+v) - F(p) - T(v)\|}{\|v\|} = 0$$

Proposición 7.1.1. *En las condiciones de antes, la aplicación lineal asociada es única y viene dada por*

$$T(v) = F_*(p)(v), \quad v \in \mathbb{R}^n$$

con lo que

$$T(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p+tv) - F(p)}{t}$$

que coincide con la derivada direccional de F en la dirección de $v \in \mathbb{R}^n$

Proposición 7.1.2.

- I) F, G diferenciables en p , entonces $\lambda F + \mu G$ es diferenciable en p para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Además, en estas circunstancias,

$$D_v(\lambda F + \mu G) = \lambda D_v F + \mu D_v G$$

para cada $v \in \mathbb{R}^n$.

- II) Para F diferenciable en un punto p se tiene que

$$D_{\lambda v_1 + \mu v_2} F = \lambda D_{v_1} F + \mu D_{v_2} F$$

para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y cada $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$.

- III) Si tenemos $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{R}^n , $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i v_i$, entonces

$$D_v F = \sum_{i=1}^n \lambda^i D_{v_i} F$$

- IV) Para $\{e_1, \dots, e_n\}$ base canónica de \mathbb{R}^n y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := D_{e_i} f$$

En virtud de la propiedad anterior

$$v(f) := D_v f = \sum_{i=1}^n \lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

siempre que $v = \sum_{i=1}^n \lambda^i v_i$.

7.1.2. Derivada covariante en \mathbb{R}^n .

Para $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ campo de vectores diferenciable,

$$X: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x^1, \dots, x^n)$$

donde $x^i = x^i(x_1, \dots, x_n)$ y para $v \in \mathbb{R}^n$ se define la derivada direccional del campo X como

$$(D_v X)_p = (v(x^1), \dots, v(x^n))$$

que surge de desarrollar la expresión

$$(D_v X)_p = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X(p + tv) - X(p)}{t}$$

Si generalizamos tomando dos campos de vectores diferenciables en p , a saber, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ definimos la derivada covariante en \mathbb{R}^n de Y en la dirección de X como

$$(D_X Y)(p) := D_{X_p} Y = (X_p(Y^1), \dots, X_p(Y^n))$$

Tomando $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = X_p$ resulta que $X_p = \sum \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x_i}$ y por tanto

$$(D_X Y)(p) = \left(\frac{\partial(Y^1 \circ \alpha)}{\partial t} \Big|_{t=0}, \dots, \frac{\partial(Y^n \circ \alpha)}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)$$

Proposición 7.1.3. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

- I) $D_X(Y + Z) = D_X Y + D_X Z$
- II) $D_{X+Y} Z = D_X Z + D_Y Z$
- III) $D_{fX} Y = f D_X Y$
- IV) $D_X(fY) = X(f)Y + f D_X Y$

obteniendo así el operador

$$D: \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \times \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$$

$$(X, Y) \longmapsto D_X Y$$

7.2. Conexión lineal sobre una variedad.

Definición 7.2.1 (Conexión lineal). Dada una variedad diferenciable M de dimensión n , una *conexión lineal* sobre M es una aplicación

$$\begin{aligned} \nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que verifique las propiedades

$$\text{I) } \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$\text{II) } \nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$\text{III) } \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$\text{IV) } \nabla_X(fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

donde $f \in \mathfrak{F}(M)$ (funciones diferenciables)

7.2.1. Enfoque axiomático.

Dada una carta (U, x_1, \dots, x_n) podemos expresar la conexión como combinación lineal de los elementos de la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ de la forma

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Si elegimos otro sistema coordenado $(\bar{U}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ entonces

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\beta} = \sum_{\gamma=1}^n \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma}$$

La relación existente entre los coeficientes de una conexión respecto de las bases

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}, \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{x}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^n} \right\}$$

viene dada por

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \quad (7.1)$$

Definición 7.2.2 (Tensor de torsión). Dada M variedad diferenciable de dimensión n y una conexión lineal ∇ sobre M , se define el *tensor de torsión de tipo (1,2)* como

$$\begin{aligned} T: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \end{aligned}$$

Los coeficientes del tensor vienen dados por

$$T_{ij} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k}$$

Definición 7.2.3 (Tensor de curvatura). Dada M variedad diferenciable de dimensión n y una conexión lineal ∇ sobre M , se define el **tensor de curvatura de tipo (1,3)** como

$$R: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

Los coeficientes del tensor vienen dados por

$$R_{jkl} = R\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} + \sum_{h=1}^n \Gamma_{lj}^h \Gamma_{kh}^i - \Gamma_{kj}^h \Gamma_{lh}^i \right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Si tenemos $\{E_1, \dots, E_n\}$ una base de campos de vectores y $\{\theta^1, \dots, \theta^n\}$ su base dual (1-formas diferenciables) se tiene que

$$\nabla_X E_j = \sum_{i=1}^n \theta_j^i(X) E_i, \quad X \in \mathfrak{X}(U)$$

donde $\theta_j^i(X)$ son las formas de conexión asociadas a ∇ respecto de la base $\{E_1, \dots, E_n\}$

7.2.2. Enfoque tensorial o clásico.

En una variedad M , consideremos un campo de vectores diferenciable X que respecto a un sistema de coordenadas $(U, (x^1, \dots, x^n))$ se expresa por $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. En general, $\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$ no representa a un tensor de tipo (1,1) porque no se satisface la ley del cambio de base. Ocurre lo mismo para cualquier campo tensorial. Trataremos de generalizar la operación de derivación parcial, que se comporte como la derivada ordinaria, y cuyo resultado sea un nuevo tensor. La denominaremos **derivación covariante**

Definición 7.2.4 (Derivada covariante). La **derivada covariante** del campo de vectores X viene dado por el tensor cuyas componentes son

$$X_{;j}^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^i X^k$$

donde Γ_{jk}^i son n^3 funciones diferenciables, denominados coeficientes de la conexión, satisfaciendo la ley relativa del cambio de base dada por (7.1).

¹ Suprimiremos el símbolo del sumatorio, adoptando el convenio de Einstein, según el cual, índices en factores distintos de un mismo sumando colocados uno arriba y otro abajo, indica sumatorio en todo el rango del índice.

La *derivada covariante* de un tensor K de tipo (p,q) viene dado por el tensor cuyas componentes son

$$K_{j_1 \dots j_q; k}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}}{\partial x^k} + \Gamma_{kl}^{i_\alpha} K_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{\alpha-1} l i_{\alpha+1} \dots i_p} - \Gamma_{kj\beta}^h K_{j_1 \dots j_{\beta-1} h j_{\beta+1} \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$$

Definición 7.2.5 (Tensores torsión y curvatura). Se denomina *tensor torsión* al tensor de tipo $(1,2)$ cuyas componentes vienen dadas por

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$$

Se denomina *tensor de curvatura* al tensor de tipo $(1,3)$ que tiene por componentes

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{kj}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{lj}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{kj}^h \Gamma_{lh}^i - \Gamma_{lj}^h \Gamma_{kh}^i$$

De imponer que las derivadas covariantes segundas sean independientes del orden de derivación surge que el tensor de torsión y de curvatura deben ser nulos.

Definición 7.2.6 (Espacio de Riemman). Decimos que g es un *tensor métrico* sobre M a cualquier campo de tensores de tipo $(0,2)$ sobre M simétrico, no degenerado y de índice constante. En otras palabras, g es una asignación diferenciable que a cada punto $x \in M$ le asocia un producto escalar g_x en el espacio tangente $T_x(M)$. Se denomina variedad semi-riemmaniana o *espacio de Riemman* a una variedad provista de un tensor métrico g . Como caso particular, si el índice es nulo, obtenemos una variedad de Riemman y si el índice es uno con $\dim M = n \geq 2$ se tiene una variedad de Lorentz.

Definición 7.2.7 (Símbolos de Christoffel de segunda especie). Se prueba que se puede definir una conexión, conocida como *conexión riemmaniana*, a partir del tensor métrico g que permita la operación de derivación covariante, obteniéndose el tensor de curvatura, satisfaciendo que el tensor torsión y que la derivada covariante del tensor métrico obtenida mediante la conexión sean nulos. Dicha conexión viene dada por los coeficientes

$$\Gamma_{ij}^k \frac{1}{2} g^{kh} \left(\frac{\partial g_{jh}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right)$$

que se conocen como *símbolos de Christoffel de segunda especie*, donde los g^{ij} son los coeficientes de la matriz inversa de la formada con los g_{ij}

Definición 7.2.8 (Tensor gravitatorio de Einstein. Tensor de Ricci). El *tensor gravitatorio de Einstein*, que es simétrico, se define por

$$G_{ij} = S_{ij} - \frac{1}{2} r g_{ij}$$

donde $S_{ij} = R_{ij}^h$ es es tensor obtenido por contracción del tensor curvatura en el último índice que se conoce como *tensor de Ricci*.

7.2.3. Conexiones definidas por caminos.

En una variedad diferenciable M de dimensión n , los espacios tangentes $T_x M, T_y M$ para $x, y \in M$ son isomorfos (al ser de la misma dimensión) pero no son canónicamente isomorfos como en \mathbb{R}^n . Una forma de definir dicho isomorfismo es considerando un camino $\tau: [0, 1] \rightarrow M$, $\tau(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ satisfaciendo $\tau(0) = x$, $\tau(1) = y$ y definiendo la aplicación $\tau_{xy}: T_x M \rightarrow T_y M$ dependiente de τ y de los puntos x e y que satisfaga

$$\text{a) } \tau_{xy} = \tau_{zy} \circ \tau_{xz}, \quad z \in \tau((0, 1))$$

$$\text{b) } \tau_{yx} = \tau_{xy}^{-1}, \quad x, y \in M$$

Trataremos de encontrar un isomorfismo

$$\tau_t: T_{\tau(0)} \rightarrow T_{\tau(t)}, \quad \tau(v_0) := v_t = A_t \cdot v_0$$

donde A_t es una matriz no singular cuyos coeficientes son diferenciables. Derivando respecto de t resulta $\dot{v}_t = \dot{A}_t \cdot A_t^{-1} v_t$ pues $v_0 = A_t^{-1} v_t$. Considerando $-w_t = \dot{A}_t A_t^{-1}$ y asumiendo que $w_t = w(x, \dot{x})$, obtenemos la ecuación

$$\dot{v}_t + w \cdot v_t = 0, \quad v_t(0) = v_0$$

que admite solución exigiéndole cierta regularidad a w . Además interesa que dicha solución no dependa de la parametrización elegida de la curva τ , que surge de pedirle a w sea homogénea de grado 1, es decir,

$$w(x, \lambda \dot{x}) = \lambda w(x, \dot{x})$$

Otra cosa a exigir es que la ecuación sea invariante frente a los cambios de coordenadas, obteniéndose tras los cálculos que debe tenerse que

$$\left(\bar{w}_\beta^\alpha \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 \bar{x}^\alpha}{\partial x^k \partial x^j} \dot{x}^j - w_k^j \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \right) v^k = 0$$

Tomando $w_j^i = \Gamma_{jk}^i \cdot \dot{x}^k$ se tendría todo lo anterior y se podría definir el isomorfismo buscado. El problema recíproco, construir una conexión lineal a partir de un isomorfismo entre $T_x M$ y $T_{x(t)} M$, lo resuelve el siguiente resultado.

Proposición 7.2.1. *Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow M$ una curva diferenciable con $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = X_x$. Consideremos un campo de vectores Y sobre α*

$$Y: [0, 1] \rightarrow T_{\alpha(t)} M$$

Entonces se tiene que

$$\nabla_{X_x} Y = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\tau_t^{-1}(Y(t)) - Y(0))$$

donde $\tau_t: T_{\alpha(0)} M \rightarrow T_{\alpha(t)} M$ es desplazamiento paralelo a lo largo de la curva α desde $\alpha(0)$ hasta $\alpha(t)$.

7.2.4. Enfoque por fibrados.

Recordemos que el fibrado tangente de M , variedad de dimensión n , es

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

siendo $T_x M$ una subvariedad regular n -dimensional de $T(M)$ por ser la proyección canónica $\pi: T(M) \rightarrow M$ una submersión.

Definición 7.2.9 (Subespacio vertical). Un vector tangente a $T(M)$ en un punto $v \in T(M)$ se dice que es *vertical* si es tangente a la subvariedad $T_{\pi(v)} M$. Denotaremos al conjunto de los vectores verticales en $v \in T(M)$ por \mathcal{V}_v

Además se pueden caracterizar de la forma

$$W \in \mathfrak{X}(T(M)) \iff \pi_*(W) = 0$$

Para $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, consideremos el difeomorfismo $\lambda: T(M) \rightarrow T(M)$, $\lambda(v) = \lambda \cdot v$ con aplicación inducida λ_* cuya matriz asociada es

$$(\lambda_i^j) = \begin{pmatrix} \lambda I_n & 0 \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix}$$

Por otra parte sea H una distribución que cumpla que

- $T_v(T(M)) = H_v \oplus \mathcal{V}_v$
- $\lambda(H_v) = H_{\lambda v}$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
- $H: v \rightarrow H_v$ es distribución diferenciable.

El objetivo es definir una conexión lineal ∇ sobre M . Para ello usaremos ciertos campos vectoriales auxiliares. Sea $Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $u \in T_x M$ de modo que

$$Y_x = u \quad , \quad \nabla_u Y = 0$$

Definimos $H_u = Y_*(T_x M)$. Se tiene que H_v es un subespacio vectorial n -dimensional de $T_v(T(M))$ que no depende de Y y que satisface las propiedades anteriores.

Definición 7.2.10 (Subespacio horizontal). El subespacio de $T_v(T(M))$ definido por H_v se denomina *subespacio horizontal* y a la distribución H se conoce por *distribución horizontal* sobre $T(M)$ o *conexión* en el fibrado tangente $T(M)$.

7.2.4.1 Distribución horizontal en $L(M)$.

Sea M una variedad diferenciable n -dimensional. Para cada $x \in M$, denotamos

$$L_x = \{B_x / B_x \text{ base de } T_x M\}$$

y consideremos

$$L(M) = \bigcup_{x \in M} L_x = \{(x; v_1, \dots, v_n) / \{v_1, \dots, v_n\} \text{ base de } T_x M\}$$

La proyección natural definida por $\pi(x; v_1, \dots, v_n) = x$ es submersión y se prueba que si $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ es una atlas sobre la variedad M entonces $\{(\tilde{U}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ permite definir una estructura de variedad diferenciable sobre $L(M)$ que se conoce por **fibrado de las referencias lineales** sobre M .

Consideremos las siguientes aplicaciones diferenciables

a) Si $GL(n, \mathbb{R})$ el grupo lineal general

$$\begin{aligned} \phi: L(M) \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow L(M) \\ \phi(p, a) &= \left(x; \sum_{i=1}^n a_1^i v_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_n^i v_i \right) \end{aligned}$$

que induce sendas aplicaciones diferenciables

$$\begin{array}{ccc} \phi_a: L(M) &\longrightarrow L(M) & R_a \equiv \phi_p: GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow L(M) \\ p \longmapsto pa & & a \longmapsto pa \end{array}$$

La aplicación R_a se llama **traslación a la derecha**.

b) Para un abierto coordenado U de M , la aplicación

$$\begin{aligned} s_U: U &\longrightarrow L(M) \\ x &\longmapsto s_U(x) = \left(x; \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_x, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_x \right) \end{aligned}$$

que se conoce como **sección local canónica** o **campo de referencias básico**. Además $\pi \circ s_U = 1_U$.

c) Para un abierto coordenado U de M , la aplicación

$$\begin{aligned} h: U \times GL(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \tilde{U} = \pi^{-1}(U) \\ (x, a) &\longmapsto h(x, a) = s_U(x)a \end{aligned}$$

es difeomorfismo.

La definición de verticalidad en $L(M)$ es análoga a la de $T(M)$.

Sea ahora ∇ una conexión sobre M , la distribución definida por $H_p = s_*(T_x M)$ donde $s: M \longrightarrow L(M)$, $s(x) = p$ es un campo de referencias que satisface que

$$\nabla_u s = 0, \quad \forall u \in T_x M$$

cumple las propiedades

$$a) \quad T_p(L(M)) = H_p \oplus \mathcal{V}_p$$

$$\text{b) } (R_a)_*(H_p) = H_{pa}$$

c) $H: p \longrightarrow H_p$ es distribución diferenciable.

7.2.4.2 Transporte paralelo deducido por una distribución horizontal en $L(M)$.

Veamos el recíproco de la construcción anterior; es decir, si tenemos una conexión en $L(M)$ dada por una distribución H verificando (7.2.4), entonces se puede construir un transporte paralelo en M y por tanto dar una conexión en M (según la definición de Koszul).

Definición 7.2.11 (Levantamiento horizontal). Dado un campo de vectores X sobre M , existe un único campo de vectores \widehat{X} sobre $L(M)$ horizontal y que se proyecta en X , es decir,

$$\widehat{X}_p \in H_p, \quad \pi_*(\widehat{X}_p) = X_{\pi(p)}$$

para cada $p \in L(M)$, que se denomina **levantamiento horizontal** de X .

Una curva diferenciable $\gamma: [0, 1] \longrightarrow M$ se denomina **horizontal** si sus vectores tangentes $\gamma'(t)$ son horizontales. Dada una curva diferenciable $\alpha: [0, 1] \longrightarrow L(M)$ sobre M , definimos el **levantamiento horizontal** de α como una curva horizontal $\widehat{\alpha}: [0, 1] \longrightarrow L(M)$ que se proyecta en α , es decir, $\pi \circ \widehat{\alpha} = \alpha$.

Proposición 7.2.2. Si ∇ es una conexión sobre M , entonces por integración de las ecuaciones diferenciales ordinarias,

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k Y^i \frac{dx^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

podemos transportar el espacio tangente a lo largo de curvas en M . Si $p = (x; e_1, \dots, e_n) \in L(M)$ y α es una curva en M con $\alpha(0) = x$, entonces por transporte paralelo definimos una curva diferenciable

$$t \mapsto \widetilde{\alpha}(t) = (\alpha(t); E_1(t), \dots, E_n(t))$$

en $L(M)$, donde cada $E_i \in \mathfrak{X}(M)$ es el transporte paralelo de $e_i = E_i(0)$ a lo largo de α . Y como se verifica que $\nabla_{\alpha'} E_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, resulta que $\widehat{\alpha}'(t) \in H_{\widetilde{\alpha}(t)}$, es decir, $\widehat{\alpha}$ es una curva horizontal.

Definición 7.2.12 (Transporte paralelo). Sea $L_{\alpha(t)} = \pi^{-1}(\alpha(t))$ la fibra sobre $\alpha(t)$, es decir, el conjunto de todas las referencias lineales de $T_{\alpha(t)}(M)$. Definimos

$$\begin{aligned} \tau_t: L_{\alpha(0)} &\longrightarrow L_{\alpha(t)} \\ p &\mapsto \tau_t(p) = \widehat{\alpha}(t) \end{aligned}$$

donde $\widehat{\alpha}$ es el levantamiento horizontal de α con $\widehat{\alpha}(0) = p$. Decimos que la aplicación τ_t es el **transporte paralelo** a lo largo de α .

Este desplazamiento en $L(M)$ paralelo permite definir el transporte paralelo en M . Todo $p = (x; e_1, \dots, e_n) \in L(M)$ determina un isomorfismo

$$\tilde{p}: \mathbb{R}^n \longrightarrow T_{\pi(p)}(M), \quad \tilde{p}(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i e_i$$

que satisface que $\tilde{p}\tilde{a}(\xi) = \tilde{p}(a\xi)$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall a \in GL(n, \mathbb{R})$ donde $a\xi$ es el producto usual de una matriz de orden n por un vector de \mathbb{R}^n .

Si $\alpha: [0, 1] \longrightarrow M$ es una curva en M y $v \in T_x(M)$, sea $\hat{\alpha}: [0, 1] \longrightarrow L(M)$ el levantamiento horizontal de α con valor inicial $\hat{\alpha}(0) = p$. Como el vector v se expresa de forma única respecto a la referencia de p , existe un único $\xi \in \mathbb{R}^n$ tal que $\tilde{p}(\xi) = v$. Definimos entonces el transporte paralelo en M sobre la curva α , como la aplicación, (también denotada por τ_t)

$$\begin{aligned} \tau_t: T_x(M) &\longrightarrow T_{\alpha(t)}(M) \\ v &\longmapsto \tau_t(v) = \widetilde{\hat{\alpha}(t)}(\xi) \end{aligned}$$

que es un isomorfismo entre espacios vectoriales.

Hemos definido a partir de una conexión H en $L(M)$ un transporte paralelo en M . Si H estuviera definido por una derivada covariante ∇ en M , este transporte paralelo definido por H coincide con el que determina ∇ .

7.2.4.3 Distribución horizontal en $T(M)$ definida por una distribución horizontal en $L(M)$.

Expondremos otra manera de definir la conexión en $T(M)$ a partir de la conexión en $L(M)$. Dada una conexión H en $L(M)$, existe una única distribución $K: v \longrightarrow K_v$ diferenciable sobre $T(M)$ tal que

$$T_v(T(M)) = K_v \oplus \mathcal{V}_v, \quad \forall v \in T(M) \tag{7.2}$$

Definimos, para $v_0 \in T(M)$,

$$K_{v_0} = (h_{\xi_0})_*(H_{p_0})$$

donde $p_0 \in L_{x_0} \subset L(M)$ es una referencia en $x_0 = \pi(v_0)$, siendo ξ_0 las coordenadas de v_0 respecto a p_0 , esto es, $\tilde{p}_0(\xi_0) = v_0$ y $h_{\xi_0}: L(M) \longrightarrow T(M)$ definida por $h_{\xi_0}(p) = \tilde{p}(\xi_0)$. Esta aplicación satisface (7.2) y

$$\lambda_*(K_{v_0}) = K_{\lambda v_0}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Parte II

Fase Investigadora.

Capítulo 1

Revisión de la Teoría de Fourier.

En este capítulo haremos un breve repaso de los conceptos básicos de la teoría de Fourier para sucesiones (y para funciones aunque con menos profundidad) para mostrar que los filtros desempeñan un papel esencial en la aplicación a las wavelets. Pretende ser una guía autocontenida de los resultados clave de dicha teoría, así como de la teoría de filtrado que posteriormente usemos. Como textos de referencia véanse [8] y [1] donde se describen con detalle la DFT y tópicos relacionados así como las técnicas básicas para tratar los diversos inconvenientes que pueden presentarse.

1.1. Transformada de Fourier de secuencias infinitas.

Consideremos una sucesión real o compleja $\{a_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ del espacio $l^2(\mathbb{Z})$, es decir,

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t|^2 < \infty.$$

La **transformada de Fourier discreta** (DFT) de $\{a_t\}$ viene dada por

$$A(f) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t e^{-i2\pi ft} \quad (1.1)$$

donde $-\infty < f < \infty$ se conoce como **frecuencia**.

La función $A = A(f)$ suele llamarse también **análisis de Fourier** de $\{a_t\}$ e intuitivamente puede ser interpretada como un intento de medir cuánto coinciden las sucesiones $\{a_t\}$ y $\{e^{-i2\pi ft}\}$, esto es, cuanto mayor es $|A(f)|$, más coinciden tales sucesiones.

Es fácil comprobar que $A = A(f)$ tiene período la unidad, es decir,

$$A(f + j) = A(f), \quad j \in \mathbb{Z} \quad (1.2a)$$

y que en sucesiones reales, $\{a_t\} \subset \mathbb{R}$, se satisface que

$$A(-f) = A^*(f) \quad (1.2b)$$

De la condición (1.2a) se concluye que la información que posee $A = A(f)$ se encuentra en cualquier intervalo de tamaño la unidad. Elegiremos, por convenio, que

$$A = A(f), \quad |f| \leq \frac{1}{2},$$

mientras que de la condición (1.2b) se sigue que la función módulo de la DFT de sucesiones reales es simétrica par, es decir,

$$|A(f)| = |A(-f)|, \quad f \in \mathbb{R}.$$

La *transformada inversa de Fourier*, o *ecuación de síntesis*, de $A = A(f)$ viene dada por

$$a_t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A(f) e^{i2\pi ft} df, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.3)$$

por lo que $\{a_t\}$ y $A = A(f)$ son dos representaciones distintas de la misma entidad matemática que se denominan *par de Fourier* y que denotaremos, en adelante, por

$$\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot)$$

significando que se satisfacen las relaciones dadas en (1.1) y (1.3).

De la relación dada por (1.3) se observa que cuanto mayor es la cantidad $|A(f)|$, mayor es la importancia de las sinusoidales de frecuencia f en la reconstrucción de $\{a_t\}$ a partir de $A = A(f)$.

Recordemos la identidad de Parseval para $\{a_t\}, \{b_t\} \in l^2(\mathbb{Z})$ tales que

$$\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot) \quad , \quad \{b_t\} \longleftrightarrow B(\cdot)$$

que establece que

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t b_t^* = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} A(f) B^*(f) df \quad (1.4)$$

y cuya inmediata consecuencia es

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |A(f)|^2 df. \quad (1.5)$$

Otra relación importante, para $\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot)$ con $\{a_t\} \in l^2(\mathbb{Z})$, es la función de transferencia de las subsucesiones formadas por los elementos de índice par/impar que vienen dadas por

$$\{a_{2t}\} \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(A\left(\frac{f}{2}\right) + A\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) \right), \quad (1.6a)$$

$$\{a_{2t+1}\} \longleftrightarrow \frac{e^{i\pi f}}{2} \left(A\left(\frac{f}{2}i\right) - A\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) \right). \quad (1.6b)$$

1.2. Convolución y filtrado de secuencias infinitas.

Dadas $\{a_t\}, \{b_t\} \in l^2(\mathbb{Z})$ se define la *convolución* como

$$a \star b_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_u b_{t-u}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

que, en general, no es un elemento de $l^2(\mathbb{Z})$. Asumiremos, en adelante, que todas las convoluciones consideradas caen en $l^2(\mathbb{Z})$.

La propiedad más importante de la convolución de sucesiones es que para $\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot)$, $\{b_t\} \longleftrightarrow B(\cdot)$ entonces

$$\{a \star b_t\} \longleftrightarrow A(\cdot)B(\cdot) \quad (1.7)$$

que se parafrasea mediante “*convolución en el dominio tiempo equivale a multiplicación en el dominio frecuencia*”.

La *correlación cruzada compleja*, para,

$$\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot) \quad , \quad \{b_t\} \longleftrightarrow B(\cdot)$$

se define mediante

$$a^* \star b_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_t^* b_{t+u}, \quad t \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

y que satisface que

$$\{a^* \star b_t\} \longleftrightarrow A^*(\cdot)B(\cdot) \quad (1.9)$$

por lo que una consecuencia inmediata es que

$$\{a^* \star a_t\} \longleftrightarrow |A(\cdot)|^2$$

donde $a^* \star a_t = \sum_{u=-\infty}^{\infty} a_t^* a_{t+u}$, $t \in \mathbb{Z}$ que se conoce como *autocorrelación* de $\{a_t\}$.

Denotando las componentes de la convolución apropiadamente, se obtiene la noción de filtrado. Considerando $\{a_t\}$ el filtro y $\{b_t\}$ la sucesión a filtrar, entonces $\{a \star b_t\}$ es el resultado del filtrado, es decir, la versión filtrada de $\{b_t\}$. La representaremos de la forma

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{\{a_t\}} \longrightarrow \{a \star b_t\} \quad (1.10a)$$

o equivalentemente, dado que $\{a_t\} \longleftrightarrow A(\cdot)$,

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{A(\cdot)} \longrightarrow \{a \star b_t\} \quad (1.10b)$$

pudiendo referirnos igualmente a él como “*filtro $\{a_t\}$* ” o “*filtro $A(\cdot)$* ” siendo $\{a_t\}$ la *secuencia impulso-respuesta* y $A(\cdot)$, la *función de transferencia*.

Observación 1.2.1. En algunos casos, para explicitar el valor de la variable en la que actúa $A(\cdot)$, podremos utilizar la notación

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{A(f)} \longrightarrow \{a \star b_t\}. \quad (1.10c)$$

Como en general la función de transferencia $A(f)$ toma valores complejos, es conveniente considerar su representación polar

$$A(f) = |A(f)|e^{i\theta(f)}, \quad |f| \leq \frac{1}{2}$$

donde las funciones definidas por $|A(f)|$ y $\theta(f)$ se conocen respectivamente como **ganancia** y **fase** del filtro (obsérvese que $\theta(f)$ está bien definido cuando $|A(f)| > 0$).

Ejemplo 1.2.1. En los siguientes ejemplos consideraremos una serie temporal que será usada para ilustrar los resultados de filtrarlo a través de uno de paso alto y otro de paso bajo. Sea

$$b_t = \sum_{l=1}^L C_l \phi_l^{|t|}, \quad t = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

donde C_l y ϕ_l son reales tal que $|\phi_l| < 1$ teniendo por transformada de Fourier

$$B(f) = \sum_{l=1}^L C_l \frac{1 - \phi_l^2}{1 - 2\phi_l \cos(2\pi f) + \phi_l^2}$$

Tomaremos, por ejemplo, $L = 2$ siendo

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{3}{16} & , & & C_2 &= \frac{1}{20} \\ \phi_1 &= \frac{4}{5} & , & & \phi_2 &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

A) FILTRO DE PASO BAJO. Supongamos la secuencia impulso-respuesta dada por

$$a_t = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t = 0 \\ \frac{1}{4} & , t = \pm 1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

con función transferencia dada por

$$A(f) = \frac{1}{4} \left(e^{2\pi i f} + e^{-2\pi i f} \right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\cos(2\pi f) + 1) = \cos^2(\pi f).$$

La representación gráfica que se tiene en la figura 1.1 sugiere que el filtro $\{a_t\}$ es un filtro de paso bajo: preserva las componentes de frecuencia baja y atenúa las de frecuencia alta.

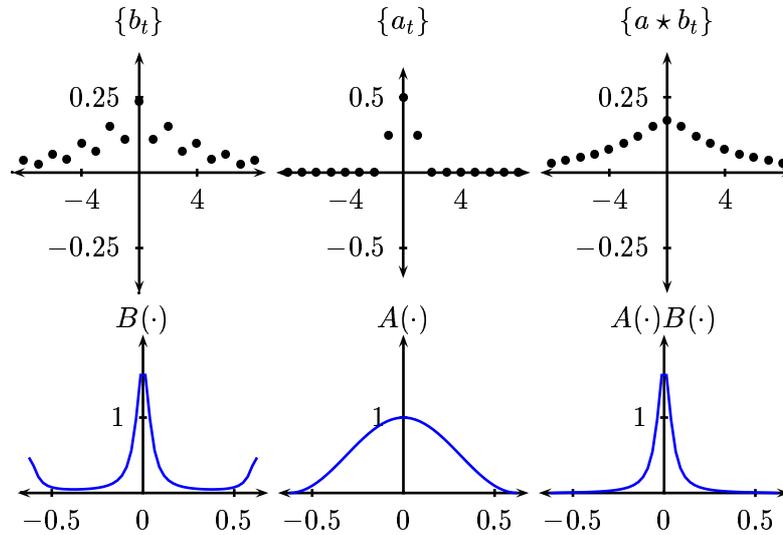


Figura 1.1: Filtrado a paso bajo de la serie $\{b_t\}$.

B) FILTRO DE PASO ALTO. Supongamos la secuencia impulso-respuesta dada por

$$a_t = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t = 0 \\ -\frac{1}{4} & , t = \pm 1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

con función transferencia dada por

$$A(f) = -\frac{1}{4} (e^{2\pi i f} + e^{-2\pi i f}) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos(2\pi f)) = \sin^2(\pi f).$$

La representación gráfica de la figura 1.2 sugiere que el filtro $\{a_t\}$ es un filtro de paso alto: preserva las componentes de frecuencia alta y atenúa las de frecuencia baja.

C) CASCADA DE FILTROS. Supongamos que $\{a_{m,t}\}$, $m = 1, \dots, M$ son M filtros, con correspondientes funciones de transferencia $A_m(\cdot)$, que forman una cascada de filtros donde $\{a_{m,t}\}$ es el m -ésimo filtro cuya entrada es $\{b_t\}$ y cuya salida es $\{c_t\}$

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{A_1(\cdot)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{A_M(\cdot)} \longrightarrow \{c_t\}$$

Se prueba que existe un filtro equivalente a la cascada de filtros

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{\{a_t\}} \longrightarrow \{c_t\}$$

donde $A(f) = \prod_{m=1}^M A_m(f)$ que se obtiene mediante la convolución sucesiva de los filtros.

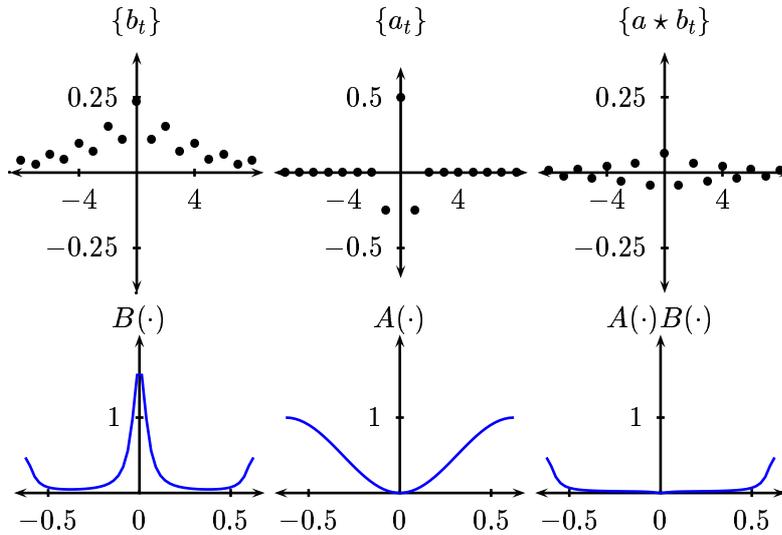


Figura 1.2: Filtrado a paso alto de la serie $\{b_t\}$.

Además si el m -ésimo filtro satisface que $a_{m,K_m} \neq 0$ y $a_{m,K_m+L_m-1} \neq 0$ siendo $a_{m,t} = 0$ para todo $t \leq K_m - 1$ y $t \geq K_m + L_m$, esto es que tenga anchura $L_m \in \mathbb{Z}^+$, entonces la función de transferencia viene dada por

$$A_m(f) = \sum_{t=K_m}^{K_m+L_m-1} a_{m,t} e^{-2\pi f t}$$

y la anchura del filtro equivalente, por

$$L = \sum_{m=1}^M L_m - M + 1. \quad (1.11)$$

1.3. Transformada de Fourier de secuencias finitas.

Supongamos $\{a_t\}_{t=0}^{N-1}$ una secuencia real o compleja finita. La **transformada discreta de Fourier** (o ecuación de análisis) viene dada por

$$A_k = \sum_{t=0}^{N-1} a_t e^{-i2\pi \frac{k}{N} t}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.12)$$

que corresponde a $A_k = A(\frac{k}{N})$. La ecuación (1.12) permite definir una sucesión que es periódica de periodo N términos, es decir,

$$A_k = A_{k+nN}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

para $n \in \mathbb{Z}$.

La **transformada inversa de Fourier** (o ecuación de síntesis) queda

$$a_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k e^{i2\pi \frac{k}{N}t}, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (1.13)$$

y análogamente denotamos

$$\{a_t\} \longleftrightarrow \{A_k\}$$

para representar que se satisfacen (1.12) y (1.13).

Se tienen resultados similares para $\{a_t\} \longleftrightarrow \{A_k\}$, $\{b_t\} \longleftrightarrow \{B_k\}$ dados por

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{N-1} a_t b_t^* &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A_k B_k^*, \\ \sum_{t=0}^{N-1} |a_t|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |A_k|^2. \end{aligned}$$

1.4. Convolución y filtrado circular de secuencias finitas.

Consideremos $\{a_t\}_{t=0}^{N-1}$ y $\{b_t\}_{t=0}^{N-1}$ con $\{a_t\} \longleftrightarrow \{A_k\}$, $\{b_t\} \longleftrightarrow \{B_k\}$. Definimos la **convolución circular** de $\{a_t\}$ con $\{b_t\}$ a la secuencia

$$a \star b_t = \sum_{u=0}^{N-1} a_u b_{t-u \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

que resulta de convolucionar $\{a_t\}$ con la extensión periódica de $\{b_t\}$.

Obsérvese que dada una secuencia finita de términos b_0, \dots, b_{N-1} , la sucesión definida por

$$\tilde{b}_t = b_{t \bmod N}, \quad t \in \mathbb{Z}$$

es periódica de tamaño N y se conoce como **extensión periódica de $\{b_t\}$** . En adelante, salvo mención expresa, siempre que se utilice la notación $b_{x \bmod y}$, el subíndice de la sucesión se referirá al valor obtenido de calcular el resto del argumento izquierdo de 'mod' (x) al dividir por el argumento derecho del 'mod' (y) pudiendo contener, ambas expresiones, las operaciones aritméticas.

Dos conceptos relacionados muy importantes son la **correlación cruzada compleja circular** y la **autocorrelación circular**, definidas, respectivamente, por

$$a^* \star b_t = \sum_{u=0}^{N-1} a_u^* b_{u+t \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (1.14)$$

$$a^* \star a_t = \sum_{u=0}^{N-1} a_u^* a_{u+t \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (1.15)$$

cuyas funciones de transferencia son, respectivamente,

$$\sum_{t=0}^{N-1} a^* b_t e^{-i2\pi t \frac{k}{N}} = A_k^* B_k, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.16)$$

$$\sum_{t=0}^{N-1} a^* a_t e^{-i2\pi t \frac{k}{N}} = |A_k|^2, \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (1.17)$$

que representamos por

$$\{a^* \star b_t\} \longleftrightarrow \{A_k^* B_k\}, \quad \{a^* \star a_t\} \longleftrightarrow \{|A_k|^2\}$$

(recordamos que $A_k^* = A^*(\frac{k}{N})$ y $B_k = B(\frac{k}{N})$).

1.4.1. Filtros periodizados.

Para filtrar una secuencia finita con un filtro infinito, construimos la extensión periódica de la secuencia finita a filtrar y la filtramos normalmente. Resulta que, para un filtro infinito $\{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ y una secuencia finita $\{b_t\}_{t=0}^{N-1}$,

$$c_t = \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v b_{t-v \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

el resultado de dicho filtrado y puede expresarse en términos de un filtro circular de tamaño N , denominado **filtro periodizado** correspondiente a $\{a_t\}$. En efecto,

$$\begin{aligned} c_t &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} a_v \cdot b_{t-v \bmod N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{u=nN}^{(n+1)N-1} a_u \cdot b_{t-u \bmod N} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{u=0}^{N-1} a_{u+nN} \cdot b_{t-(u+nN) \bmod N} = \\ &= \sum_{u=0}^{N-1} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{u+nN} \right) b_{t-u \bmod N} = \sum_{u=0}^{N-1} a_u^o \cdot b_{t-u \bmod N} \end{aligned}$$

donde

$$a_t^o = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{t+nN}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

se conoce como periodización de longitud N de $\{a_t\}$. En esencia el filtro $\{a_t\}$ se corta en bloques de N coeficientes

$$\dots, \underbrace{a_{-N}, \dots, a_{-1}}_{\text{bloque } n=-1}, \underbrace{a_0, \dots, a_{N-1}}_{\text{bloque } n=0}, \underbrace{a_N, \dots, a_{2N-1}}_{\text{bloque } n=1}, \dots$$

que son solapados y sumados para obtenerlo.

$$\begin{array}{r|l}
 \vdots & \vdots \quad \dots \quad \vdots \\
 \text{bloque } n=-1 & a_{-N} \quad \dots \quad a_{-1} \\
 & + \quad \dots \quad + \\
 \text{bloque } n=0 & a_0 \quad \dots \quad a_{N-1} \\
 & + \quad \dots \quad + \\
 \text{bloque } n=1 & a_N \quad \dots \quad a_{2N-1} \\
 & + \quad \dots \quad + \\
 \vdots & \vdots \quad \dots \quad \vdots \\
 \text{filtro periodizado} & \Downarrow \quad \dots \quad \Downarrow \\
 & a_0^o \quad \dots \quad a_{N-1}^o
 \end{array}$$

Si consideramos

$$\{a_t^o\} \longleftrightarrow \{A_k^o\}$$

y $A(\cdot)$ la función de transferencia de $\{a_t\}$ se tiene que

$$A_k^o = A\left(\frac{k}{N}\right).$$

En adelante denotaremos

$$\{b_t\} \longrightarrow \boxed{\left\{A\left(\frac{k}{N}\right)\right\}} \longrightarrow \{c_t\}$$

de la forma compacta

$$\mathbf{B} \longrightarrow \boxed{A\left(\frac{k}{N}\right)} \longrightarrow \mathbf{C}$$

donde se considera $\mathbf{B} = (b_0, \dots, b_{N-1})$ y $\mathbf{C} = (c_0, \dots, c_{N-1})$.

De la construcción de un filtro periodizado se sigue que cuando el filtro tiene anchura $L \leq N$, esto es,

$$a_0 \cdot a_{L-1} \neq 0 \quad \wedge \quad a_t = 0, \quad t < 0 \quad \vee \quad t \geq L$$

entonces su periodización a longitud N resulta

$$a_t^o = \begin{cases} a_t & , \quad 0 \leq t < L \\ 0 & , \quad L \leq t < N \end{cases}.$$

Finalmente destacar que aunque un filtro $\{a_t\}$ sea normalizado de la forma

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |a_t|^2 = 1$$

el correspondiente filtro periodizado de longitud N , $\{a_t^o\}$, en general, no satisface la misma propiedad.

Capítulo 2

Transformadas ortonormales de series temporales.

El objetivo de este capítulo es el estudio de los conceptos subyacentes en las transformadas ortonormales dada su particular aplicación en la definición del análisis wavelet. Se trata, por tanto, de re-expresar una serie temporal a través de su transformada de forma que pueda ser fácilmente reconstruible a partir de ésta y que consiste en “agrupar” toda la información que contiene la serie en una forma distinta que facilite el análisis de los datos.

2.1. Revisión de la teoría básica de transformadas ortonormales.

Consideremos dos vectores de dimensión N ,

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}.$$

El *producto interior* de \mathbf{X} e \mathbf{Y} es

$$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}^T \mathbf{Y} = \sum_{t=0}^{N-1} X_t Y_t$$

mientras que la *energía* de \mathbf{X} viene dada por

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \|\mathbf{X}\|^2$$

donde la *norma* al cuadrado es,

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \sum_{t=0}^{N-1} X_t^2$$

El *grupo ortonormal* de orden n para transformaciones ortonormales entre espacios vectoriales reales es

$$O(n) = \{\mathcal{O} \in M_n(\mathbb{R}) / \mathcal{O}^T \cdot \mathcal{O} = I_n\}$$

donde $M_n(\mathbb{R})$ es el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes reales.

Observación 2.1.1. Téngase en cuenta que la k -ésima fila de la matriz \mathcal{O}^T coincide con la k -ésima columna de la matriz \mathcal{O} , es decir, $\mathcal{O}_{k\bullet}^T = \mathcal{O}_{\bullet k}$

Supongamos que $\mathcal{O} \in O(N)$, si denotamos, para $j, k \in \{0, \dots, N-1\}$, mediante $\mathcal{O}_{j\bullet}$ y $\mathcal{O}_{\bullet k}$ a las fila j -ésima y la columna k -ésima respectivamente de \mathcal{O} , podemos escribir, teniendo en cuenta la observación 2.1.1 que

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{0\bullet}^T \\ \vdots \\ \mathcal{O}_{N-1\bullet}^T \end{bmatrix} = [\mathcal{O}_{\bullet 0}, \dots, \mathcal{O}_{\bullet N-1}]$$

deduciéndose de $\mathcal{O}^T \cdot \mathcal{O} = I_N$ las relaciones de ortonormalidad

$$\langle \mathcal{O}_{\bullet k}, \mathcal{O}_{\bullet k'} \rangle = \delta_{k,k'} \quad , \quad \langle \mathcal{O}_{j\bullet}, \mathcal{O}_{j'\bullet} \rangle = \delta_{j,j'} \quad (2.1)$$

donde

$$\delta_{i,i'} = \begin{cases} 1 & , i = i' \\ 0 & \text{resto} \end{cases} .$$

Podemos *analizar* (o descomponer) la serie \mathbf{X} respecto a la matriz ortonormal \mathcal{O} sin más que premultiplicarla por esta última resultando que

$$\mathbf{O} = \mathcal{O}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{X}, \mathcal{O}_{0\bullet} \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{X}, \mathcal{O}_{N-1\bullet} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_0 \\ \vdots \\ O_{N-1} \end{bmatrix}$$

siendo O_j el j -ésimo coeficiente de la transformada (es decir, el j -ésimo elemento de \mathbf{O}) dado por $O_j = \langle \mathbf{X}, \mathcal{O}_{j\bullet} \rangle$.

Debido a que $\mathcal{O}^T \cdot \mathcal{O} = I_N$, obtenemos la *ecuación de síntesis*

$$\mathbf{X} = \mathcal{O}^T \mathbf{O} = \sum_{j=0}^{N-1} O_j \mathcal{O}_{j\bullet} = \sum_{j=0}^{N-1} \langle \mathbf{X}, \mathcal{O}_{j\bullet} \rangle \mathcal{O}_{j\bullet} .$$

Una propiedad importante de la transformada ortonormal es que se trata de una transformación *isométrica*, es decir, preserva la energía en la transformación

$$\varepsilon_{\mathbf{O}} = \|\mathbf{O}\|^2 = \langle \mathcal{O}\mathbf{X}, \mathcal{O}\mathbf{X} \rangle = (\mathcal{O}\mathbf{X})^T (\mathcal{O}\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathcal{O}^T \mathcal{O} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} = \|\mathbf{X}\|^2 = \varepsilon_{\mathbf{X}} .$$

Dado que

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \sum X_t^2 \quad , \quad \varepsilon_{\mathbf{O}} = \sum O_j^2$$

podemos decir que la secuencia $\{X_t^2\}$ describe cómo se descompone la energía a lo largo del tiempo mientras que $\{O_j^2\}$, describe cómo se descompone a lo largo de los coeficientes de la transformada.

Teorema 2.1.1 (Teorema de la proyección). *La mejor aproximación, en sentido de mínimos cuadrados, de \mathbf{X} en el subespacio*

$$\langle \mathcal{O}_{0\bullet}, \dots, \mathcal{O}_{N'-1\bullet} \rangle$$

para $N' < N$ viene dada por

$$\widehat{\mathbf{X}} = \sum_{j=0}^{N'-1} \alpha_j \mathcal{O}_{j\bullet}$$

donde $\alpha_j = \langle \mathbf{X}, \mathcal{O}_{j\bullet} \rangle = O_j$ siendo

$$\|e\|^2 = \|\widehat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|^2 = \sum_{j=N'}^{N-1} O_j^2$$

el más pequeño de los resultantes con las posibles elecciones de α_j pues se tiene que

$$\|e\|^2 = \sum_{j=0}^{N'-1} (O_j - \alpha_j)^2 + \sum_{j=N'}^{N-1} O_j^2$$

por lo que su valor mínimo viene dado por

$$\|e\|^2 = \sum_{j=N'}^{N-1} O_j^2.$$

2.2. Transformada ortornormal compleja.

Es de interés generalizar el desarrollo anterior al caso en que la transformación ortornormal sea entre espacios vectoriales complejos, es decir,

$$O(n) = \{ \mathcal{O} \in M_n(\mathbb{C}) / \mathcal{O}^H \cdot \mathcal{O} = I_n \}$$

donde $\mathcal{O}^H = (\mathcal{O}^*)^T$ representa la transpuesta en sentido hermitiano de \mathcal{O} .

Análogamente, denotaremos por $\mathcal{O}_{j\bullet}^H$ y por $\mathcal{O}_{\bullet k}$ a la fila j -ésima y la columna k -ésima de \mathcal{O} respectivamente. Obsérvese que cuando los coeficientes de \mathcal{O} son reales, todo esto se traduce en lo visto anteriormente.

El *producto interior* de $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbb{C}^N$ es

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \mathbf{U}^H \mathbf{V} = \sum_{t=0}^{N-1} U_t^* V_t$$

donde se satisface que

$$\langle \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle = \langle \mathbf{V}, \mathbf{U} \rangle^*$$

mientras que la norma al cuadrado,

$$\|\mathbf{U}\|^2 = \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle = \mathbf{U}^H \mathbf{U} = \sum_{t=0}^{N-1} |U_t|^2$$

que define la *energía* de la serie temporal $\{U_t\}$,

$$\varepsilon_{\mathbf{U}} = \|\mathbf{U}\|^2$$

teniéndose las mismas relaciones de ortogonalidad que las dadas en (2.1).

En estas condiciones tenemos que para $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^N$, definimos

$$\mathbf{O} = \mathcal{O}\mathbf{X} \quad (\text{ecuación de análisis})$$

$$\mathbf{X} = \mathcal{O}^H \mathbf{O} \quad (\text{ecuación de síntesis})$$

como la *transformada ortonormal* y su *inversa* basadas en una matriz unitaria ($\mathcal{O}^H \mathcal{O} = I$).

Análogamente se tiene que $\varepsilon_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{O}}$ pudiendo extenderse, el teorema de la proyección, al caso complejo.

2.3. Transformada ortonormal de Fourier discreta.

La *transformada ortonormal de Fourier discreta* (ODFT) de la secuencia real finita de longitud N $\{X_t\}$ viene dada por $\{F_k\}$ donde

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i2\pi t \frac{k}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

se conoce como *k-ésimo coeficiente de Fourier* de $\{X_t\}$ denotándose

$$\mathbf{F} = \mathcal{F}\mathbf{X}$$

siendo $\mathbf{F} = [F_0, \dots, F_{N-1}]$, $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_{N-1}]$ y $\mathcal{F} = (F_{kt})$ con

$$F_{kt} = \frac{e^{-i2\pi t \frac{k}{N}}}{\sqrt{N}}, \quad k, t \in \{0, \dots, N-1\}$$

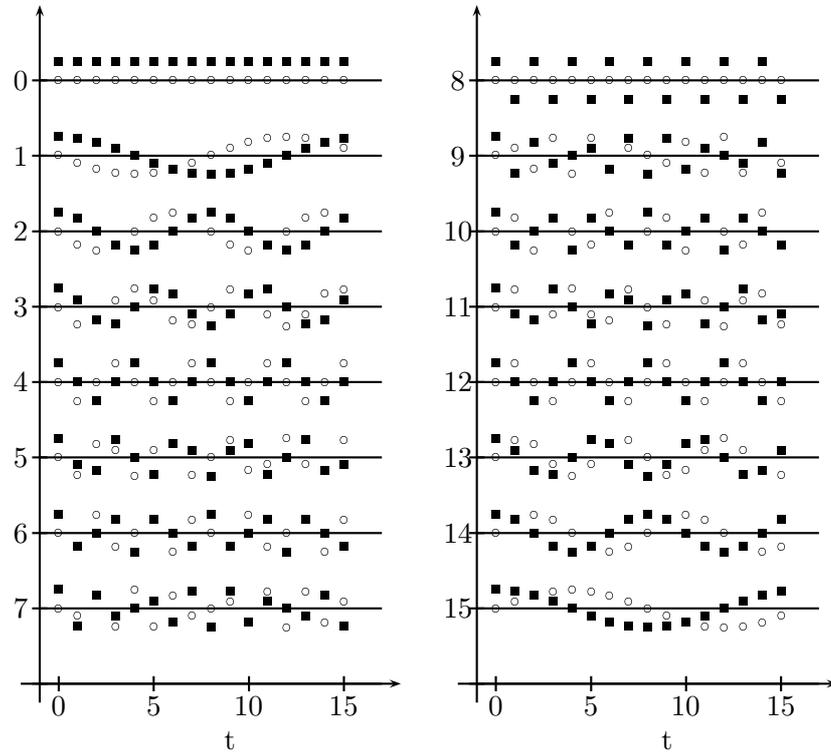


Figura 2.1: Filas de la matriz \mathcal{F} correspondiente a la ODFT para $N=16$ ($k=0..7$ a la izquierda y $k=8..15$ a la derecha) donde se representan la parte real e imaginaria por cuadrados y círculos respectivamente.

probándose que $\mathcal{F}^H \mathcal{F} = I$. En general, $F_k \in \mathbb{C}$ satisfaciendo que

$$F_0 \in \mathbb{R} \quad (2.2a)$$

$$F_{N-k} = F_k^* \quad (2.2b)$$

$$N \text{ par} \implies F_{\frac{N}{2}} \in \mathbb{R} \quad (2.2c)$$

por lo que se deduce que los $2N$ coeficientes que involucra la construcción de los F_k quedan determinados por N valores reales que son: F_0 y $F_{\frac{N}{2}}$ (cuando N es par) además de las partes real e imaginaria de los F_k con $1 \leq k < \frac{N}{2}$ (hay $\frac{N}{2} - 1$, cuando N es par y $\frac{N-1}{2}$, cuando N es impar). Además, también se tiene que $\varepsilon_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{F}}$ cumpliéndose que

$$\|\mathbf{F}\|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |F_k|^2 = |F_0|^2 + 2 \cdot \sum_{1 \leq k < \frac{N}{2}} |F_k|^2 \left[+ F_{\frac{N}{2}} \right]$$

omitiéndose el término entre corchetes para N impar. En adelante, se utilizará esta notación salvo que se diga lo contrario.

La razón por la que ODFT ha sido útil en muchas aplicaciones es porque el k -ésimo coeficiente de Fourier, F_k , puede asociarse a la frecuencia $f_k = \frac{k}{N}$ por lo que la ODFT

descompone la energía en una base de frecuencias. Considerando que las observaciones se suceden cada Δt entonces la frecuencia teórica f_k se corresponde con la frecuencia física $\frac{k}{N\Delta t}$ es decir “frecuencia física” = $f_k \cdot \frac{1}{\Delta t}$.

Observación 2.3.1. La relación entre la frecuencia física y teórica es la dada en el párrafo anterior. Para aclarar el porqué de la existencia de la frecuencia teórica debemos considerar que cuando representamos una serie de datos que se suceden cada Δt unidades de tiempo como una sucesión de reales de índice natural queda oculto el tamaño del muestreo pasando a sobrentenderse (debido al índice de la sucesión) que el tamaño del muestreo es la unidad. De aquí en adelante, salvo mención expresa, nos referiremos siempre a frecuencias teóricas y períodos teóricos.

En la figura 2.1 se ilustran las columnas de la matriz \mathcal{F} de la ODFT para $N=16$.

Si consideramos la media y la varianza muestral de la serie temporal $\{X_t\}$ dadas por

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}} &= \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} X_t \\ \sigma_{\mathbf{X}}^2 &= \frac{1}{N} \|\mathbf{X}\|^2 - \bar{\mathbf{X}}^2 = \frac{1}{N} \varepsilon_{\mathbf{X}} - \bar{\mathbf{X}}^2\end{aligned}$$

se prueba fácilmente que

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{X}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} F_0 \\ \sigma_{\mathbf{X}}^2 &= \frac{1}{N} \|\mathbf{F}\|^2 - \bar{\mathbf{X}}^2 = \frac{1}{N} \left(2 \sum_{1 \leq k < \frac{N}{2}} |F_k|^2 \left[+ |F_{\frac{N}{2}}|^2 \right] \right)\end{aligned}$$

de forma que $\frac{2}{N} |F_k|^2$ representa la contribución a la varianza de $\{X_t\}$ debido a la frecuencia f_k para $0 < k < \frac{N}{2}$.

La descomposición anterior permite definir el *espectro de potencia empírico* o *periodograma* de $\{X_t\}$ como

$$\{P_{\mathcal{F}}(f_k) : f_k = \frac{k}{N}, k = 1, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$$

donde

$$P_{\mathcal{F}}(f_k) = \begin{cases} \frac{2|F_k|^2}{N} & , 1 \leq k < \frac{N}{2} \\ \frac{|F_k|^2}{N} & , k = \frac{N}{2} \end{cases}$$

que mide cuánto de importante es la frecuencia $f_k = \frac{k}{N}$ (es decir las componentes periódicas de período k) para la reconstrucción de la secuencia original.

La *transformada inversa ortogonal de Fourier discreta* de $\{F_k\}$ resulta

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi t \frac{k}{N}}, k = 0, \dots, N-1.$$

Dado que se satisface

$$\sum_{k=0}^{N-1} F_k \mathcal{F}_{k\bullet} = F_0 \mathcal{F}_{0\bullet} + \sum_{1 \leq k < \frac{N}{2}} F_k \mathcal{F}_{k\bullet} + F_{N-k} \mathcal{F}_{N-k\bullet} \left[+ F_{\frac{N}{2}} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}\bullet} \right]$$

definimos el *análisis detallado de orden k de Fourier* de $\{X_t\}$ como

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F},k} = \begin{cases} F_k \mathcal{F}_{k\bullet} + F_{N-k} \mathcal{F}_{N-k\bullet} & , 1 \leq k < \frac{N}{2} \\ F_{\frac{N}{2}} \mathcal{F}_{\frac{N}{2}\bullet} & , k = \frac{N}{2} \end{cases}$$

y se prueba fácilmente que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F},k} = 2\Re(F_k \mathcal{F}_{k\bullet}), \quad 0 < k < \frac{N}{2}$$

donde $\Re(v) = (\Re(v_1), \dots, \Re(v_N))$ para $v \in \mathbb{C}^N$ siendo $\Re(z)$ la parte real del complejo z .

Como

$$F_0 \mathcal{F}_{0\bullet} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1}$ representa el vector N -dimensional de unos se tiene que

$$\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{1} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \mathcal{D}_{\mathcal{F},k}$$

Además, si $\mathcal{D}_{\mathcal{F},k} = [\mathcal{D}_{\mathcal{F},k,0}, \dots, \mathcal{D}_{\mathcal{F},k,N-1}]$ siendo $F_k = A_k - iB_k$ resulta que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F},k,t} = \frac{2}{\sqrt{N}} \left(A_k \cos(2\pi f_k t) + B_k \sin(2\pi f_k t) \right) \in \mathbb{R}$$

está asociada a la frecuencia f_k .

Por otra parte definimos la componente *suave* y *rugosa de orden k* de $\{X_t\}$ como

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F},k} = \bar{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{1} + \sum_{j=1}^k \mathcal{D}_{\mathcal{F},j}, \quad \mathcal{R}_{\mathcal{F},k} = \sum_{j=k+1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \mathcal{D}_{\mathcal{F},j}$$

pues claramente se tiene que

$$\mathbf{X} = \mathcal{S}_{\mathcal{F},k} + \mathcal{R}_{\mathcal{F},k}$$

y se observa que $\mathcal{S}_{\mathcal{F},k}$ se compone de la media de \mathbf{X} y de las k frecuencias más bajas de $\mathcal{D}_{\mathcal{F},k}$, mientras que $\mathcal{R}_{\mathcal{F},k}$ se compone de las $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - k$ frecuencias más altas de $\mathcal{D}_{\mathcal{F},k}$. En contextos de ingeniería se denomina a $\mathcal{S}_{\mathcal{F},k}$ y $\mathcal{R}_{\mathcal{F},k}$ las componentes de \mathbf{X} filtradas a paso bajo y alto respectivamente. Nótese que, en virtud del teorema de la proyección, podemos interpretar a $\mathcal{S}_{\mathcal{F},k}$ como la mejor aproximación por mínimos cuadrados a \mathbf{X} en el subespacio

$$\langle \mathcal{F}_{0\bullet}, \dots, \mathcal{F}_{k\bullet} \rangle$$

mientras que $\mathcal{R}_{\mathcal{F},k}$ lo es en el subespacio

$$\langle \mathcal{F}_{k+1\bullet}, \dots, \mathcal{F}_{N-1-k\bullet} \rangle$$

pues $\mathcal{F}_{k\bullet} = \mathcal{F}_{N-k\bullet}$.

Se observa que se satisface, para todo $1 \leq k \leq \frac{N}{2}$, que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{F},k} = \mathcal{S}_{\mathcal{F},k} - \mathcal{S}_{\mathcal{F},k-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{F},k-1} - \mathcal{R}_{\mathcal{F},k}.$$

Para ilustrar el significado de las componentes suaves y rugosas véase figuras 3.7 3.8 en la páginas 158 y 159 relativas al las series de datos del ejemplo 3.3.2.

Finalmente, estudiemos la transformación traslación a la derecha. Consideremos $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_{N-1}]^T$ y sea \mathcal{T} la transformación definida por

$$\mathcal{T}\mathbf{X} = [X_{N-1}, X_0, X_1, \dots, X_{N-2}]^T \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{T}^{-1}\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_{N-1}, X_0]^T \quad (2.3b)$$

y definamos

$$\mathcal{T}^n\mathbf{X} = \mathcal{T} \cdots \mathcal{T} \mathbf{X} \quad (2.4a)$$

$$\mathcal{T}^{-n}\mathbf{X} = \mathcal{T}^{-1} \cdots \mathcal{T}^{-1} \mathbf{X} \quad (2.4b)$$

Obsérvese que $\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}\mathbf{X} = \mathbf{X}$ para todo \mathbf{X} con lo cual se cumple que

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} = I_N. \quad (2.5)$$

Es fácil comprobar que las matrices asociadas a \mathcal{T} y \mathcal{T}^{-1} vienen dadas, respecto a las bases canónicas, por

$$M(\mathcal{T}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M(\mathcal{T}^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente, y se observa que $M(\mathcal{T}^{-1}) = M(\mathcal{T})^T$ por lo que \mathcal{T} es una transformación ortonormal puesto que de la relación anterior y la ecuación (2.5) se sigue que $\mathcal{T} \cdot \mathcal{T}^T = I_N$.

Además la transformada de Fourier de $\mathcal{T}^m\mathbf{X}$ viene dada por

$$\widetilde{F}_k = F_k e^{-i2\pi m \frac{k}{N}}$$

con lo que, como $|\widetilde{F}_k| = |F_k|$, se concluye que “el espectro de potencia de la ODFT de \mathbf{X} es invariante ante las traslaciones”.

Capítulo 3

Transformada wavelet discreta.

En esta sección se introduce la transformada wavelet discreta (DWT) que representa la herramienta básica para el estudio de las series temporales vía wavelet y que desempeña un papel análogo al de la DFT en el análisis espectral. Estudiaremos el algoritmo piramidal para el cómputo de la DWT así como los filtros wavelet y escalados haciendo especial hincapié en el análisis de algunos ejemplos concretos a fin de ilustrar los resultados que se obtengan.

3.1. La esencia de una wavelet.

Una wavelet, como su nombre sugiere (en inglés), es una onda pequeña comúnmente conocida como ondícula. Al contrario que la función $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, una ondícula tiene sus oscilaciones más significativas en un conjunto limitado del tiempo.

Para cualquier $\psi(x)$ definida en \mathbb{R} satisfaciendo que

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} \psi^2(x) dx = 1$$

que imponen que $\psi(x)$ no sea idénticamente nula (2) y que las áreas que barre $\psi(x)$ sobre y bajo el eje OX son coincidentes (1) es una *ondícula*.

En la figura 3.1 se dibujan cuatro ejemplos clásicos de ondículas, la de Haar, la primera y segunda derivada de la función de densidad Gaussiana de media 0 y varianza σ^2 con

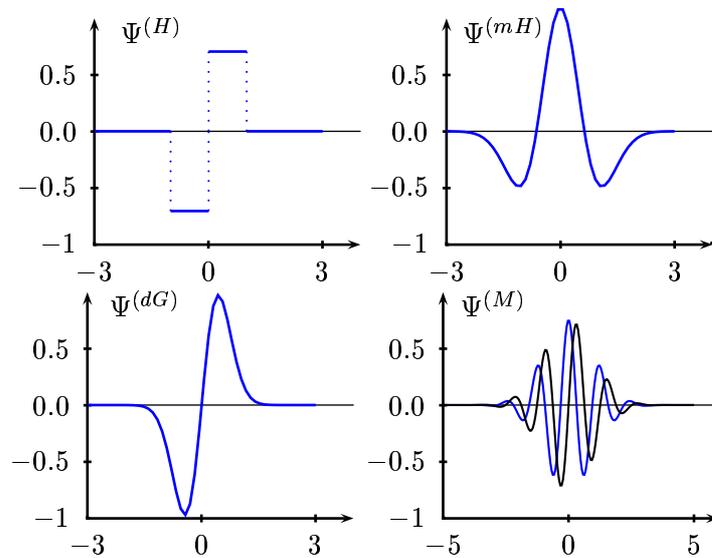


Figura 3.1: Cuatro wavelet clásicas: Haar, la primera derivada de la función de densidad gaussiana (normalizada), la segunda derivada (normalizada) y la wavelet de Morlet (parte real en azul y parte imaginaria en negro). Ver detalles en el texto.

$\sigma = 0,44$ y $\sigma = 0,63$ respectivamente y la de Morlet con $w_0 = 5$, dadas por

$$\psi^{(H)}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} & , -1 < x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \quad \psi^{(mH)}(x) = \frac{2(1 - \frac{x^2}{\sigma^2})e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{3\sigma\pi^2}}$$

$$\psi^{(dG)}(x) = \frac{\sqrt{2}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{\sigma^3\pi^2}} \quad \psi^{(M)}(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-iw_0x}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

En la práctica para que las ondículas sean útiles se suelen exigir condiciones adicionales como la condición de admisibilidad que establece que su transformada de Fourier

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u)e^{-i2\pi fu} du$$

satisfaga que

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\Psi(u)|}{f} df < \infty.$$

3.2. La esencia del análisis wavelet.

Ya tenemos una idea de que es una wavelet y de qué aspecto tiene pero, ¿para qué son útiles?

Una respuesta es que las wavelets, tales como las de la figura 3.1, sirven para evaluar como varían las medias pesadas de una función de un período al siguiente. Supongamos para fijar ideas $x(u)$ real.

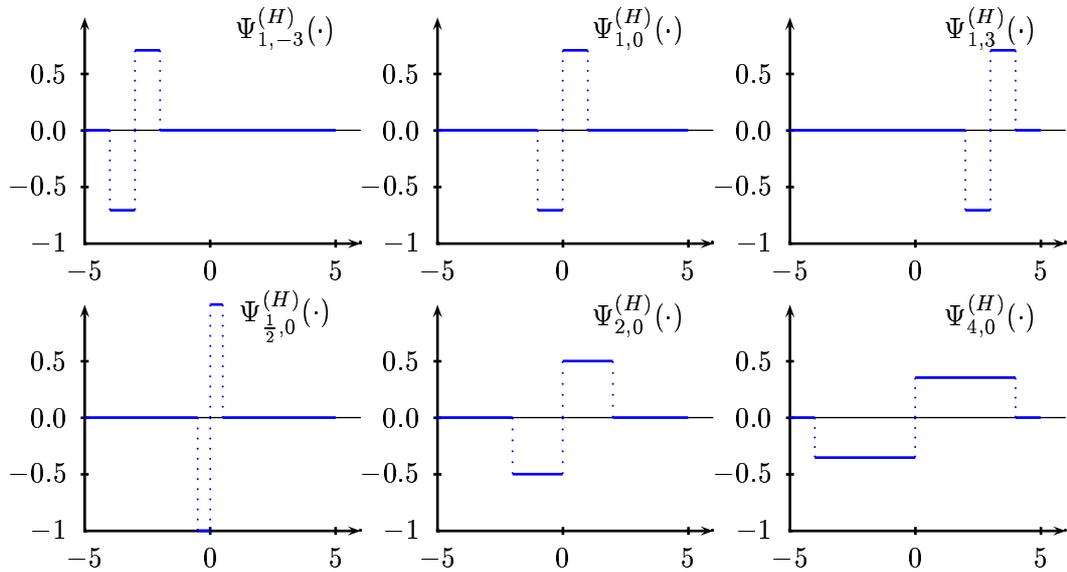


Figura 3.2: Efecto de las traslaciones y los rescalados en la ondícula de Haar.

La *media de x en el intervalo $[a, b]$* es

$$\alpha(a, b) = \frac{1}{b-a} \int_a^b x(u) du.$$

El *valor medio de x sobre una escala λ centrada en t* viene dado por

$$A(\lambda, t) = \alpha\left(t - \frac{\lambda}{2}, t + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{\lambda} \int_{t-\frac{\lambda}{2}}^{t+\frac{\lambda}{2}} x(u) du.$$

La *variación de x sobre una escala λ centrada en t* es

$$D(\lambda, t) = A\left(\lambda, t + \frac{\lambda}{2}\right) - A\left(\lambda, t - \frac{\lambda}{2}\right).$$

Es fácil probar que

$$D(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda,t}(u) x(u) du$$

donde

$$\psi_{\lambda,t}(u) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} & , t - \lambda < u \leq t \\ \frac{1}{\lambda} & , t < u \leq t + \lambda \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

que para $\lambda = 1$ y $t = 0$ resulta un múltiplo de la ondícula de Haar dibujada en la figura 3.1, es decir, $\psi_{1,0}(u) = \sqrt{2}\psi^{(H)}(u)$.

El valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^{(H)}(u) x(u) du = W^{(H)}(1, 0)$$

extrae información de $x(u)$ de cuánto varía la diferencia de las medias de $x(u)$ en una escala de 2 unidades centradas en torno a $t = 0$. Podemos extraer información similar sobre una escala de λ unidades centrada en torno a t mediante

$$W^{(H)}(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda, t}^{(H)}(u) x(u) du$$

donde

$$\psi_{\lambda, t}^{(H)}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi^{(H)}\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} & , t - \lambda < u \leq t \\ \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} & , t < u \leq t + \lambda \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

es una versión rescalada y trasladada de la ondícula de Haar. La figura 3.2 ilustra lo que ocurre en los rescalados y las traslaciones.

Variando λ podemos construir un conjunto de datos acerca de cómo varían las medias de $x(u)$ sobre diferentes escalas de un período de longitud λ al siguiente. La colección de funciones

$$\left\{ W^{(H)}(\lambda, t) : \lambda > 0, -\infty < t < \infty \right\}$$

se conoce como **transformación wavelet continua (CWT) de Haar** de $x(u)$ cuya interpretación es que $W^{(H)}(\lambda, t)$ es proporcional a la diferencia entre dos medias adyacentes de escala λ donde la primera empieza en tiempo t y la segunda termina en tiempo t .

Podemos proceder análogamente con cualquier otra ondícula $\psi = \psi(u)$ obteniéndose que

$$W(\lambda, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\lambda, t}(u) x(u) du$$

donde

$$\psi_{\lambda, t}(u) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right).$$

La reconstrucción de $x(u)$, en las hipótesis de $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(u) du < \infty$ y de que $\psi(u)$ satisfaga la condición de admisibilidad, viene dada por

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, t) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \psi\left(\frac{u-t}{\lambda}\right) du \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2}.$$

Además se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(u) du = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} W^2(\lambda, t) du \right] \frac{d\lambda}{\lambda^2}$$

El lado izquierdo de la igualdad anterior representa la energía de la señal $x(u)$ mientras que el lado derecho dice que $\frac{W^2(\lambda, t)}{\lambda^2}$ esencialmente define una función de densidad de la energía que proporciona una descomposición de la misma a lo largo del tiempo en diferentes escalas. Dado que podemos obtener la CWT de $x(u)$ a partir de $x(u)$ y viceversa

se dice que ambas son dos representaciones distintas de la misma entidad matemática. La utilidad fundamental de la CWT es presentar la información contenida en $x(u)$ en una forma distinta proporcionando la posibilidad de obtener características de interés de la señal. Es por tanto una herramienta de exploración del análisis de datos.

Con respecto a la ***transformación discreta wavelet (DWT)***, veremos que puede ser construida sin ninguna conexión explícita a la CWT pero también puede interpretarse como un intento de preservar las características de la CWT en una manera sutil. De este punto de vista, la DWT se puede ver como un muestreo de $W(t, \lambda)$ en un conjunto de escalas diádicas $\{\lambda_j = 2^{j-1} / 1 \leq j \leq J_0\}$, donde en cada escala se toman los tiempos separados por λ_j unidades. Además la DWT conserva la propiedad de la CWT de descomponer la energía de la serie temporal a lo largo de las escalas.

3.3. Descripción cualitativa de la DWT.

Al igual que la ODFT, la DWT de una serie $\{X_t\}$ es una transformación ortonormal. Considerando vectores de dimensión una potencia de 2, hecho cuya relevancia discutiremos más adelante, si escribimos

$$\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_{N-1}]^T \quad , \quad \mathbf{W} = [W_0, \dots, W_{N-1}]^T$$

donde W_n es el n-ésimo coeficiente de la DWT de $\{X_t\}$ se tiene que

$$\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X} \quad , \quad \mathbf{X} = \mathcal{W}^T\mathbf{W}$$

son las ***ecuaciones de análisis y síntesis*** respectivamente de la ***transformada DWT*** de \mathbf{X} , donde

$$\mathcal{W} \in M_N(\mathbb{R}) \text{ con } \mathcal{W}\mathcal{W}^T = I_N.$$

Además sabemos que

$$\varepsilon_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{W}\|^2 = \|\mathbf{X}\|^2 = \varepsilon_{\mathbf{X}}$$

siendo W_n^2 la contribución a la energía de la serie relativa al coeficiente de índice n .

Mientras que los coeficientes de la ODFT están asociados a frecuencias, el n-ésimo coeficiente de la DWT, W_n , está asociado con una escala y conjunto de tiempos particulares. Para ilustrar ésto obsérvese las filas de la matriz de paso de la DWT de Haar para $N=16$, cuya simple estructura la hace ideal como ejemplo introductorio. Explícitamente las filas

vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{0\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{14 \text{ ceros}}\right] \\
 \mathcal{W}_{8\bullet}^T &= \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{12 \text{ ceros}}\right] \\
 \mathcal{W}_{12\bullet}^T &= \left[\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{8 \text{ ceros}}\right] \\
 \mathcal{W}_{14\bullet}^T &= \left[\underbrace{-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}}_{8 \text{ de estos}}, \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{8 \text{ de estos}}\right] \\
 \mathcal{W}_{15\bullet}^T &= \left[\underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{16 \text{ de estos}}\right]
 \end{aligned}$$

donde el resto de filas se obtienen por traslaciones a la derecha de las anteriores, véase página 144, dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}_{1\bullet} &= \mathcal{T}^2 \mathcal{W}_{0\bullet} & \mathcal{W}_{2\bullet} &= \mathcal{T}^4 \mathcal{W}_{0\bullet} & \dots & & \mathcal{W}_{7\bullet} &= \mathcal{T}^{14} \mathcal{W}_{0\bullet} \\
 \mathcal{W}_{9\bullet} &= \mathcal{T}^4 \mathcal{W}_{8\bullet} & \mathcal{W}_{10\bullet} &= \mathcal{T}^8 \mathcal{W}_{8\bullet} & \mathcal{W}_{11\bullet} &= \mathcal{T}^{12} \mathcal{W}_{8\bullet} \\
 \mathcal{W}_{13\bullet} &= \mathcal{T}^8 \mathcal{W}_{12\bullet}
 \end{aligned}$$

Véase figura 3.3.

Definimos la media de escala λ para los valores contiguos del tiempo $t - \lambda + 1, \dots, t$ de una serie $\{X_t\}$ mediante

$$\overline{X}_t(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{l=0}^{\lambda-1} X_{t-l} \quad (3.1)$$

para $\lambda \in \mathbb{Z}^+$

Claramente se tiene que

$$\overline{X}_t(1) = X_t \quad , \quad \overline{X}_{N-1}(N) = \overline{X}.$$

De la ecuación $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$ en la transformada DWT de Haar para $N = 16$ podemos escribir que

$$W_k = \mathcal{W}_{k\bullet} \mathbf{X}, \quad k = 0, \dots, 15$$

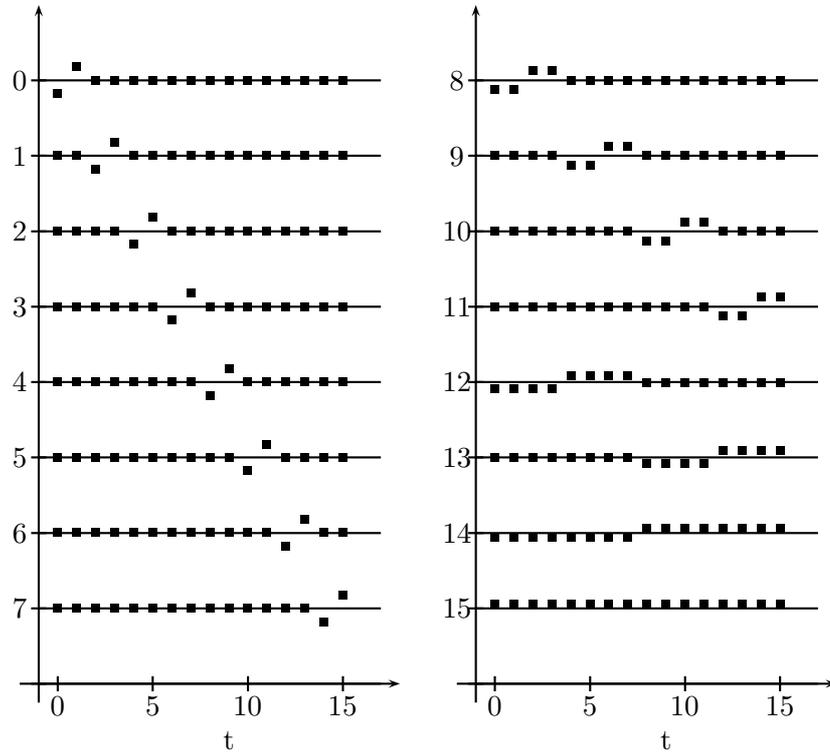


Figura 3.3: Filas de la matriz W correspondiente la DWT de Haar para $N=16$ ($k=0..7$ a la izquierda y $k=8..15$ a la derecha)

con lo que, si $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_{15}]^T$, tenemos que

$$W_0 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{14 \text{ ceros}} \right] \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_1 - X_0]$$

\vdots

$$W_7 = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{14 \text{ ceros}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{\sqrt{2}} [X_{15} - X_{14}]$$

$$W_8 = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{12 \text{ ceros}} \right] \cdot \mathbf{X} = -\frac{1}{2} [X_0 + X_1] + \frac{1}{2} [X_2 + X_3]$$

\vdots

$$W_{11} = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{12 \text{ ceros}}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \cdot \mathbf{X} = -\frac{1}{2} [X_{12} + X_{13}] + \frac{1}{2} [X_{14} + X_{15}]$$

$$W_{12} = \left[\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{0, \dots, 0}_{8 \text{ ceros}} \right] \cdot \mathbf{X} = -\frac{1}{\sqrt{8}} [X_0 + \dots + X_3] + \frac{1}{\sqrt{8}} [X_4 + \dots + X_7]$$

$$W_{13} = \left[\underbrace{0, \dots, 0}_{8 \text{ ceros}}, \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, -\frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{8}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{8}}}_{4 \text{ de estos}} \right] \cdot \mathbf{X} = -\frac{1}{\sqrt{8}} [X_8 + \dots + X_{11}] + \frac{1}{\sqrt{8}} [X_{12} + \dots + X_{15}]$$

$$W_{14} = \left[\underbrace{-\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{4}}_{8 \text{ de estos}}, \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{8 \text{ de estos}} \right] \cdot \mathbf{X} = -\frac{1}{4} [X_0 + \dots + X_7] + \frac{1}{4} [X_8 + \dots + X_{15}]$$

$$W_{15} = \left[\underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{16 \text{ de estos}} \right] \cdot \mathbf{X} = \frac{1}{4} [X_0 + \dots + X_{15}]$$

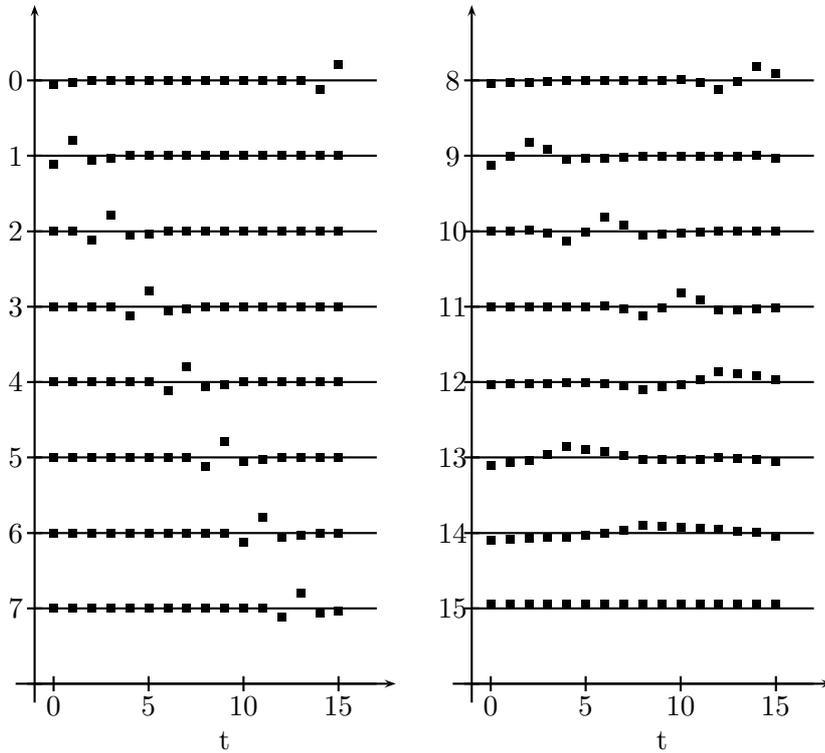


Figura 3.4: Filas de la matriz \mathcal{W} correspondiente la DWT de Daubechies con $L = 4$, $D(4)$, para $N=16$ ($k=0..7$ a la izquierda y $k=8..15$ a la derecha)

y utilizando la definición dada en (3.1) tenemos que

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{X}_1(1) - \bar{X}_0(1)] , \dots , W_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}[\bar{X}_{15}(1) - \bar{X}_{14}(1)] \\
 W_8 &= \bar{X}_3(2) - \bar{X}_1(2) , \dots , W_{11} = \bar{X}_{15}(2) - \bar{X}_{13}(2) \\
 W_{12} &= \sqrt{2}[\bar{X}_7(4) - \bar{X}_3(4)] , W_{13} = \sqrt{2}[\bar{X}_{15}(4) - \bar{X}_{11}(4)] \\
 W_{14} &= 2[\bar{X}_{15}(8) - \bar{X}_7(8)] \\
 W_{15} &= 4\bar{X}_{15}(16) = 4\bar{X}
 \end{aligned}$$

de lo que se observa que los 8 primeros coeficientes, W_0, \dots, W_7 , son proporcionales a cambios (diferencias) en medias adyacentes de escala 1 (medias de un coeficiente); los 4 siguientes, W_8, \dots, W_{11} , son cambios en medias adyacentes de escala 2 (medias de dos coeficientes); los 2 que siguen, W_{12} y W_{13} , proporcionales a cambios en medias adyacentes en escala 4; W_{14} es proporcional a cambios en medias adyacentes de escala 8 y el último, W_{15} , proporcional a la media de todos los datos de la serie.

Este comportamiento se generaliza para $N = 2^J$ de modo que los $\frac{N}{2}$ primeros coeficientes de \mathbf{W} están asociados a cambios en escala 1; los $\frac{N}{4}$ siguientes, a cambios en escala 2 y así sucesivamente hasta llegar a W_{N-4}, W_{N-3} que están asociados a cambios en escala $\frac{N}{4}$; W_{N-2} , en escala $\frac{N}{2}$ y finalmente W_{N-1} que es proporcional a la media de los datos.

Los $N - 1$ coeficientes asociados a cambios en alguna escala se denominan *coeficientes wavelet*, mientras que W_{N-1} se conoce como *coeficiente de escala*. Además cada coeficiente de la DWT de $\{X_t\}$ asociado a una escala concreta está localizado en el tiempo (sólo involucra a un subconjunto de elementos de la serie para su cálculo), consecuencia de ser una transformación local, hecho que no ocurre en la ODFT (involucra a todos los elementos de la serie para el cálculo de cada coeficiente) por tratarse de una transformación global (véase figuras 2.1 y 3.3 como comparativa).

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos descomponer los elementos de \mathbf{W} en $J + 1$ subvectores de forma que cada uno de los J primeros corresponda a los $\frac{N}{2^j}$ coeficientes de la DWT asociados a la escala $\tau_j = 2^{j-1}$ para $j = 1, \dots, J$ mientras que el $(J + 1)$ -ésimo subvector, denotado por \mathbf{V}_J , contenga únicamente al coeficiente de escala. De esta forma

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_J \\ \mathbf{V}_J \end{bmatrix}$$

y podemos escribir que

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{W}} = \|\mathbf{W}\|^2 = \sum_{j=1}^J \|\mathbf{W}_j\|^2 + \|\mathbf{V}_J\|^2$$

siendo $\|\mathbf{W}_j\|^2$ la contribución a la energía de $\{X_t\}$ debida a cambios en escala τ_j .

De forma paralela surge una partición de las filas de \mathcal{W}

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{bmatrix}$$

de modo que \mathcal{W}_1 contenga las $\frac{N}{2}$ primeras filas; \mathcal{W}_2 , las $\frac{N}{4}$ siguientes y así sucesivamente hasta llegar a \mathcal{W}_J que contiene la penúltima fila y \mathcal{V}_J , la última. Se satisface, de esta forma, que

$$\mathbf{X} = \mathcal{W}^T \mathbf{W} = \sum_{j=1}^J \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j + \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J \quad (3.2)$$

teniéndose, para $j = 1, \dots, J$, que

$$\mathbf{W}_j = \mathcal{W}_j \mathbf{X} \quad (3.3)$$

es la porción de análisis de $\mathbf{W} = \mathcal{W} \mathbf{X}$ atribuible a una escala τ_j mientras que $\mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j$ es la porción de síntesis de $\mathbf{X} = \mathcal{W}^T \mathbf{W}$ para la misma escala.

Observación 3.3.1. Destacamos que en [2] la ordenación de las filas de \mathcal{W} para las diferentes wavelets es diferente; por ejemplo, para la DWT de Haar, la ordenación es completamente al revés, esto es,

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_J \\ \mathcal{W}_{J-1} \\ \vdots \\ \mathcal{W}_1 \end{bmatrix}$$

resultando una definición equivalente a la anterior cuyos coeficientes están meramente reordenados mientras que para la DWT de $D(4)$ no sólo están reordenados sino que además los elementos de la base asociados con τ_j están trasladados a la derecha en $2\tau_j - 1$ unidades.

Definimos el *espectro de potencia* o *periodograma* de $\{X_t\}$ como

$$\{\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(\tau_j)/\tau_j = 2^{j-1}, j = 1, \dots, J\}$$

donde $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(\tau_j) = \frac{1}{N} \|\mathbf{W}_j\|^2$ verificándose que

$$\hat{\sigma}_x^2 = \sum_{j=1}^J \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(\tau_j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{W}_j\|^2 \quad (3.4)$$

En contraste con el espectro de potencia de la ODFT (véase página 144), el espectro de potencia de la DWT no es invariante ante las traslaciones mientras que el de la ODFT, sí.

Ejemplo 3.3.1. Para ilustrar lo anterior, el espectro de potencia de las series

$$\mathbf{X}_1 = [0, 0, -2, 2, 0, 0, 0, 0]^T \quad , \quad \mathbf{X}_2 = [0, 0, 0, -2, 2, 0, 0, 0]^T$$

viene dado por

$$\mathcal{P}_1(\tau_j) = \begin{cases} 1 & , \tau_j = 1 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \quad , \quad \mathcal{P}_2(\tau_j) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \tau_j = 1 \\ \frac{1}{4} & , \text{resto} \end{cases}$$

Definimos el *detalle wavelet de nivel j* como

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j \quad (3.5)$$

que se trata de un vector N -dimensional cuyos elementos están asociados a cambios en escala τ_j . Consideremos el vector

$$\mathbf{S}_J = \mathcal{V}_J^T \mathbf{V}_J \quad (3.6)$$

cuyos elementos son todos igual a la media de la serie $\mathbf{X} = \{X_t\}$, podemos escribir

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^J \mathcal{D}_j + \mathbf{S}_J \quad (3.7)$$

debido a la ecuación (3.2) y que se define como *análisis multirresolución* (MRA) de \mathbf{X} .

Debido a la ortonormalidad de \mathcal{W} se tiene que

$$\mathcal{D}_j \cdot \mathcal{D}_k = \begin{cases} \mathbf{W}_j^T \mathbf{W}_k & , k = j \\ 0 & , \text{resto} \end{cases} \quad (3.8)$$

para $1 \leq j, k \leq J$ por lo que

$$\|\mathcal{D}_j\|^2 = \|\mathbf{W}_j\|^2 \quad (3.9)$$

que de la ecuación (3.4) se infiere que

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathbf{W}_j\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^J \|\mathcal{D}_j\|^2 \quad (3.10)$$

siendo

$$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(\tau_j) = \frac{\|\mathbf{W}_j\|^2}{N} = \frac{\|\mathcal{D}_j\|^2}{N}$$

Por otra parte considerando la ecuación (3.6), definimos, para $0 \leq j \leq J - 1$, la *componente suave* de \mathbf{X} de nivel j como

$$\mathcal{S}_j = \sum_{k=j+1}^J \mathcal{D}_k + \mathbf{S}_J$$

y la *componente rugosa* de \mathbf{X} de nivel j como

$$\mathcal{R}_j = \begin{cases} 0 & , j = 0 \\ \sum_{k=1}^j \mathcal{D}_k & , 1 \leq j \leq J \end{cases}$$

donde se satisface que

$$\mathbf{X} = \mathcal{S}_j + \mathcal{R}_j \quad (3.11)$$

Además de las definiciones se deduce que

$$\mathcal{S}_j - \mathcal{S}_{j-1} = \mathcal{D}_{j+1} = \mathcal{R}_{j+1} - \mathcal{R}_j \quad (3.12)$$

Ejemplo 3.3.2. Para ilustrar el significado de \mathcal{D}_j , \mathcal{S}_j y \mathcal{R}_j consideraremos la series \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 definidas por

$$\mathbf{X}_1 = [0.2, -0.4, -0.6, -0.5, -0.8, -0.4, -0.9, 0, -0.2, 0.1, -0.1, 0.1, 0.7, 0.9, 0, 0.3]$$

$$\mathbf{X}_2 = [0.2, -0.4, -0.6, -0.5, -0.8, -0.4, -0.9, 0, -0.2, 0.1, -0.1, 0.1, 0.7, -0.9, 0, 0.3]$$

que difieren únicamente en un valor cuyo signo es el opuesto.

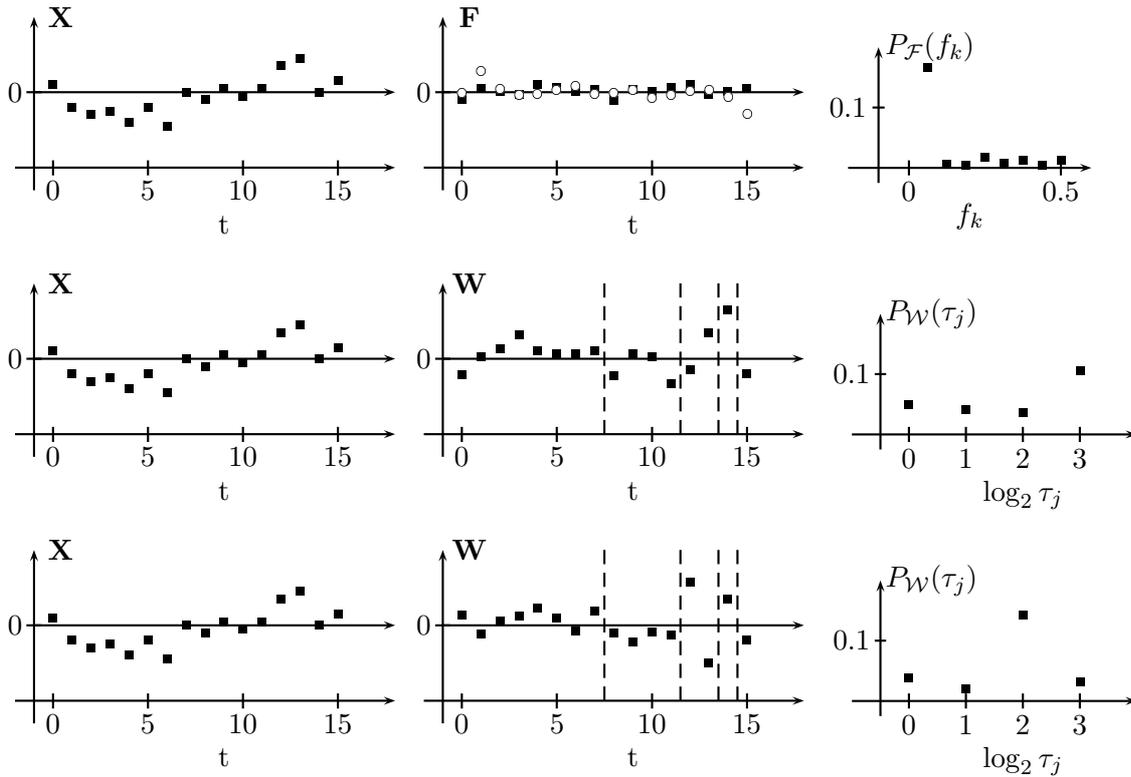


Figura 3.5: Serie, transformada DWT y espectro de potencia de la secuencia \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2. Las líneas verticales a trazos separan los coeficientes DWT en los correspondientes a $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4$ y \mathbf{V}_4 . La primera fila se tiene con la DFT de Fourier, la segunda, con la DWT de Haar y la tercera, con la DWT $D(4)$.

En la figura 3.5 se dibuja la serie, la transformada DWT y el espectro de potencia por filas; donde la primera corresponde a la DFT de Fourier; la segunda, a la DWT de Haar y la tercera, a la DWT de Daubechies para $L = 4$ para la serie \mathbf{X}_1 . Análogamente ocurre para la figura 3.6 con la serie \mathbf{X}_2 .

Comparando ambas figuras se observa que las transformadas de Fourier de \mathbf{X}_1 y \mathbf{X}_2 difieren todos sus coeficientes hecho que es consecuencia del carácter global de la transformación de Fourier. Sin embargo, en la transformación wavelet, al ser local, sólo difieren algunos coeficientes. En Haar: el séptimo, el duodécimo, el decimocuarto y el decimoquinto y el decimosexto, en $D(4)$: el séptimo, el octavo, el noveno y del duodécimo en adelante. Entre las transformadas wavelet de Haar y $D(4)$ se observa que en esta última afecta a más coeficientes el cambio de una serie a otra debido a que las medias involucran a más coeficientes al ser, la anchura de los filtros asociados a dicha wavelet, mayor.

En las siguientes figuras, (figura 3.7 y figura 3.9) se dibujan los detalles, las componentes suaves y las rugosas de la serie \mathbf{X}_1 correspondiente a las mismas transformaciones mientras que en las figuras 3.8 y 3.10 están las correspondientes a la serie \mathbf{X}_2 .

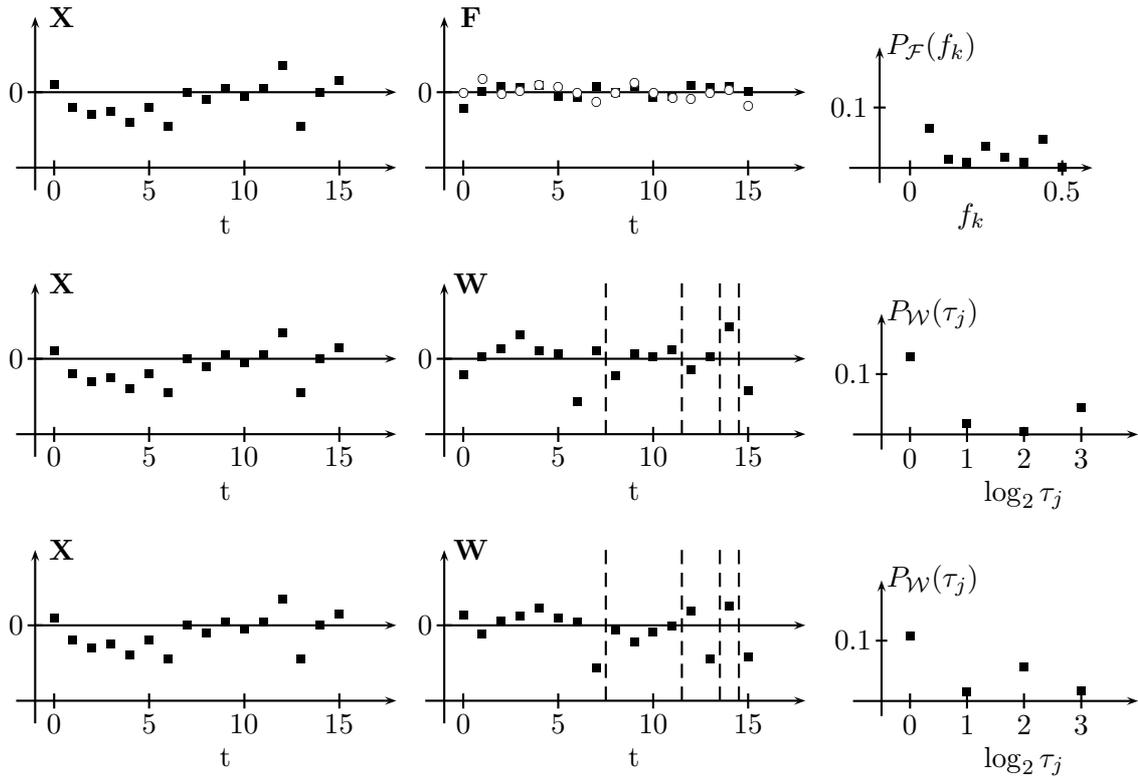


Figura 3.6: Serie, transformada DWT y espectro de potencia de la secuencia \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2. Las líneas verticales a trazos separan los coeficientes DWT en los correspondientes a $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4$ y \mathbf{V}_4 . La primera fila se tiene con la DFT de Fourier, la segunda, con la DWT de Haar y la tercera, con la DWT $D(4)$.

Los detalles y las componentes suaves/rugosas de Fourier de ambas series son totalmente diferentes pero, respecto a los de la transformada DWT de Haar y $D(4)$, son muy parecidos hasta algo más de la mitad de los coeficientes.

3.4. El algoritmo piramidal.

Con esta sección empieza la tarea de definir la DWT a través de un algoritmo que descomponga \mathcal{W} en términos de matrices dispersas conocido como algoritmo piramidal (Mallat, 1989, véase [5]) que computa \mathbf{W} en un total de $O(N)$ operaciones. Recordemos que por fuerza bruta, el cómputo de \mathbf{W} mediante la ecuación de análisis requiere $O(N^2)$ operaciones y que en el caso de la ODFT, una idea similar, reduce tal orden a $O(N \log_2 N)$ por lo que claramente el cálculo de la DWT es menos costoso que el de la ODFT.

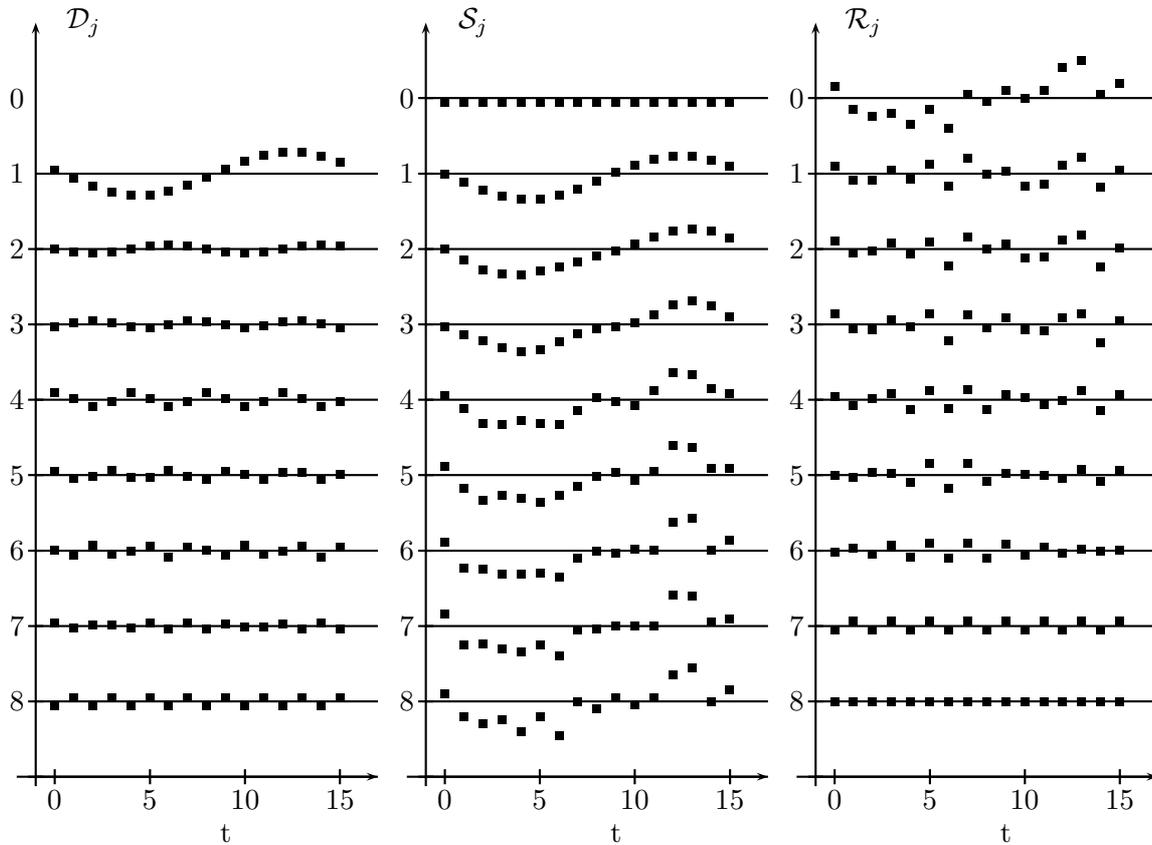


Figura 3.7: Detalles, componentes suaves y rugosas de niveles $j = 0, 1, 2, 3, 4$ para la secuencia \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2 basados en la DFT de Fourier con $N = 16$.

3.4.1. El filtro wavelet

Describiremos el algoritmo piramidal en términos de operaciones de filtrado y manipulaciones de matrices. Empezamos definiendo el filtro wavelet de anchura L . Consideremos $\{h_l\}$ satisfaciendo que

$$(1) \quad h_0 \neq 0, h_{L-1} \neq 0$$

$$(2) \quad h_l = 0, l < 0 \vee l \geq L$$

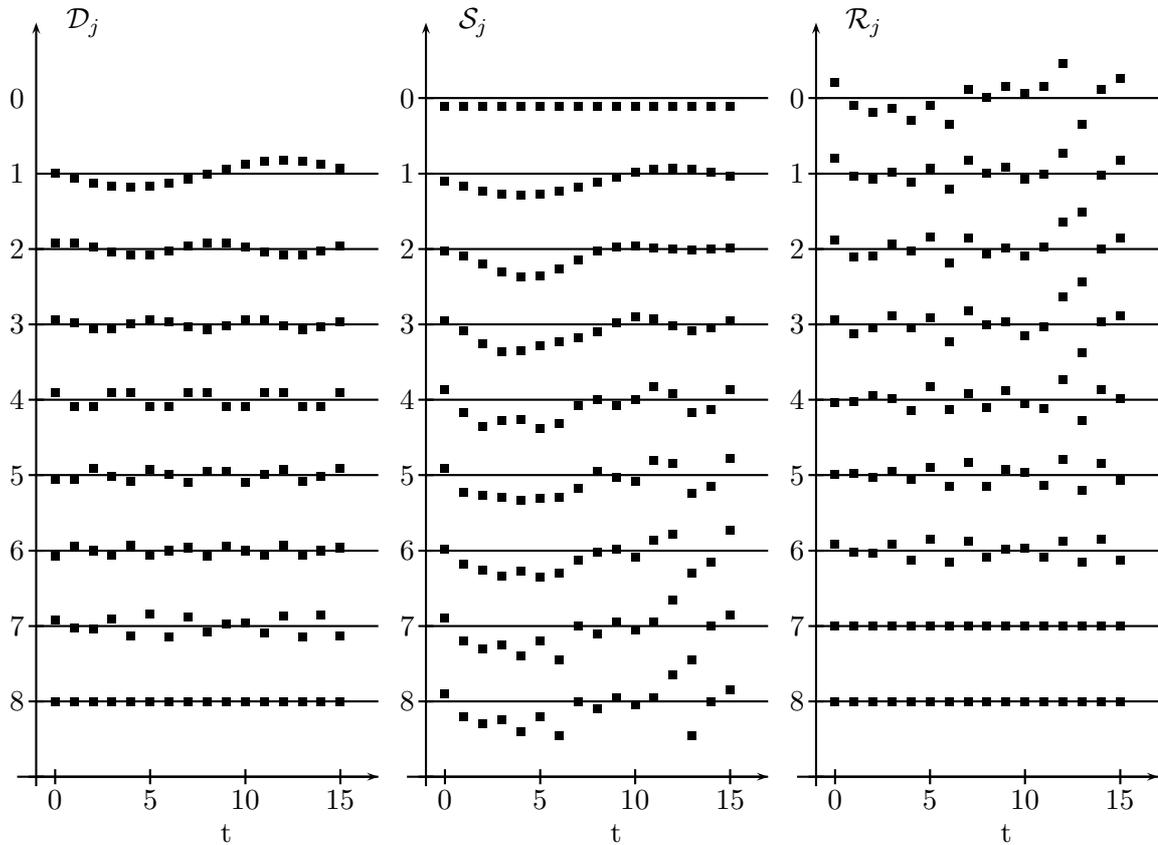


Figura 3.8: Detalles, componentes suaves y rugosas de niveles $j = 0, 1, 2, 3, 4$ para la secuencia \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2 basados en la DFT de Fourier con $N = 16$.

es decir que tenga *anchura* L . Decimos que un filtro de anchura L es un *filtro wavelet* cuando cumple que

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l = 0 \quad (3.13a)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 = 1 \quad (3.13b)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l h_{l+2n} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} = 0 \quad (3.13c)$$

donde la propiedad (3.13a) se refiere a que la media del filtro sea cero, la propiedad (3.13b), a que tenga energía unidad y la (3.13c), a que el filtro sea ortornormal a sus traslaciones pares.

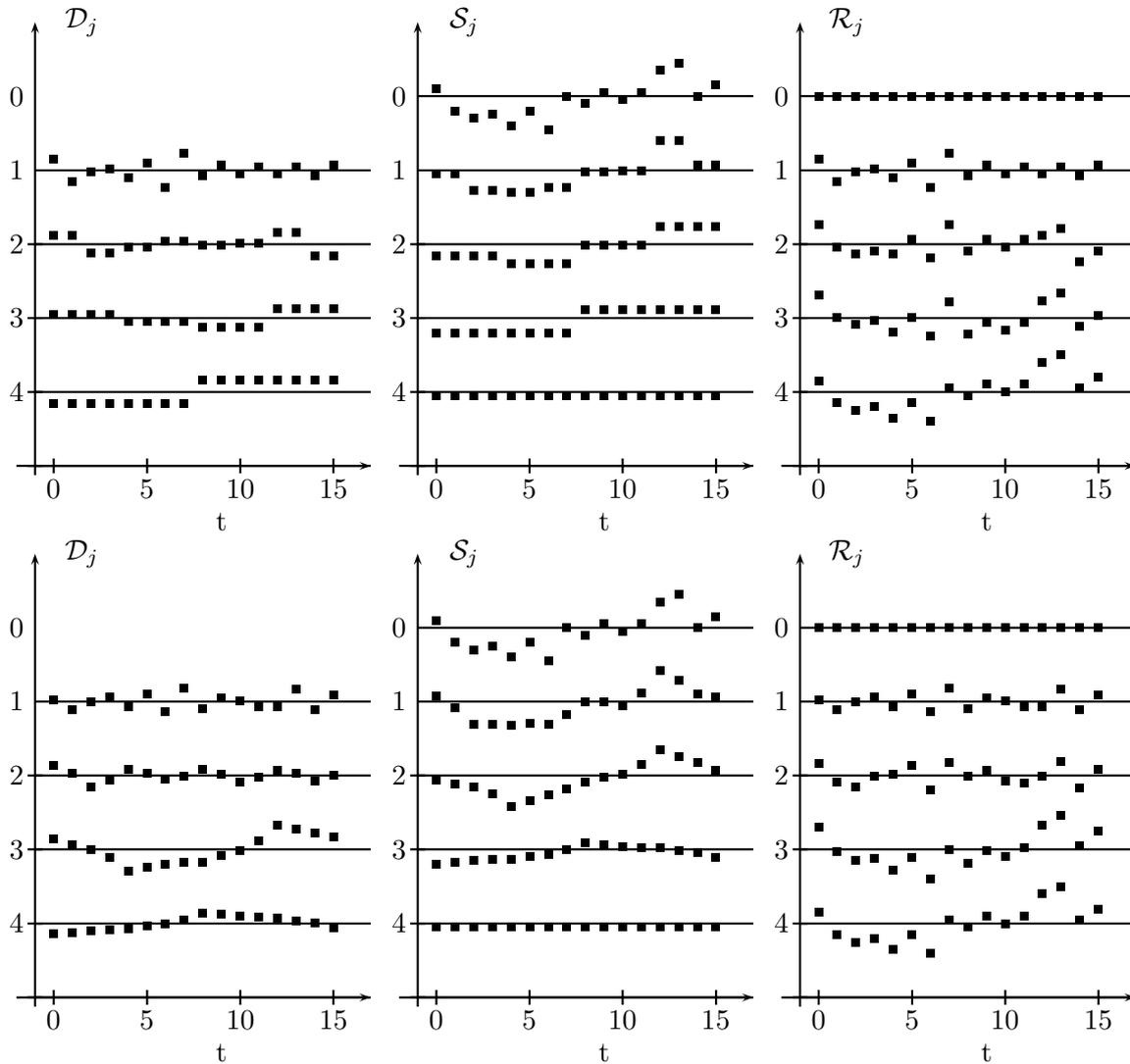


Figura 3.9: Detalles, componentes suaves y rugosas de niveles $j = 0, 1, 2, 3, 4$ para la secuencia \mathbf{X}_1 del ejemplo 3.3.2 basados en la DWT de Haar (primera fila) y de $D(4)$ de Daubechies (segunda fila) con $N = 16$.

Observación 3.4.1. De exigir que se satisfaga la ecuación (3.13c) se infiere que L debe ser par pues, en caso contrario, para $n = \frac{L-1}{2}$ se tiene que

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+L-1} = h_0 h_{L-1} \neq 0,$$

debido a la ecuación (3.13a) y por tanto $\{h_l\}$ no puede ser filtro wavelet.

Consideremos $H(\cdot)$ la función de transferencia del filtro $\{h_l\}$ dada por

$$H(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l e^{-2\pi f l} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l e^{-2\pi f l}, \quad (3.14)$$

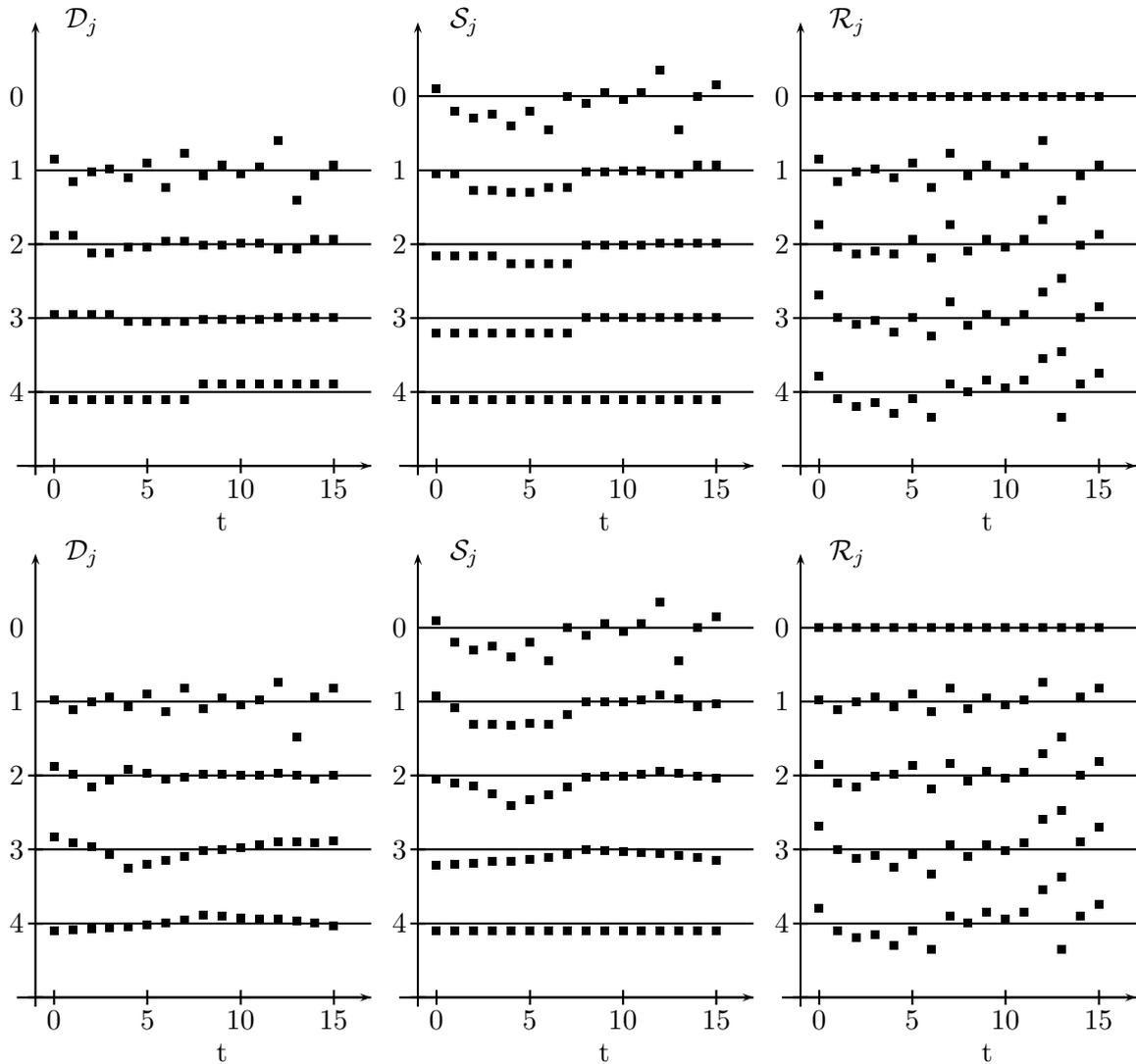


Figura 3.10: Detalles, componentes suaves y rugosas de niveles $j = 0, 1, 2, 3, 4$ para la secuencia \mathbf{X}_2 del ejemplo 3.3.2 basados en la DWT de Haar (primera fila) y de $D(4)$ de Daubechies (segunda fila) con $N = 16$.

cuya ganancia al cuadrado es

$$\mathcal{H}(f) = |H(f)|^2. \quad (3.15)$$

Con esta definición, las ecuaciones (3.13b) y (3.13c) equivalen a

$$\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f + \frac{1}{2}) = 2. \quad (3.16)$$

Supongamos que se cumple la ecuación (3.16) y supongamos $\{h_l\}$ real. La autocorrelación compleja, véase una consecuencia de la ecuación (1.9), viene dada por

$$h^* \star h_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l^* h_{l+j}, j \in \mathbb{Z}$$

que resulta, como $h_l^* = h_l$, en que

$$h \star h_j = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l h_{l+j}, j \in \mathbb{Z}$$

cuya transformada de Fourier es

$$\mathcal{H}(f) = |H(f)|^2 = H(f)H^*(f)$$

es decir, tenemos que,

$$\{h \star h_j\} \longleftrightarrow \mathcal{H}(f).$$

Utilizando la ecuación (1.6a) obtenemos que

$$\{h \star h_{2n}\} \longleftrightarrow \frac{1}{2} \left(\mathcal{H}\left(\frac{f}{2}\right) + \mathcal{H}\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) \right) \quad (3.17)$$

por lo que por la relación inversa de la DFT dada en (1.3) se sigue que

$$h \star h_{2n} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[\mathcal{H}\left(\frac{f}{2}\right) + \mathcal{H}\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) \right] e^{i2\pi f n} df.$$

Tenemos, aplicando la ecuación (3.16), que

$$h \star h_{2n} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l h_{l+2n} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i2\pi f n} df = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

con lo que se siguen las ecuaciones (3.13b) y (3.13c).

Recíprocamente si se tienen las ecuaciones (3.13b) y (3.13c) entonces

$$h \star h_{2n} = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

cuya transformada de Fourier es la unidad, por lo que dada la expresión (3.17), se debe cumplir (3.16).

Para obtener los coeficientes DWT de escala unidad, filtramos circularmente con $\{h_l\}$ la serie \mathbf{X} y el resultado lo denotamos por

$$\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l X_{t-l \bmod N}, t = 0, \dots, N-1, \quad (3.18)$$

y los calculamos mediante la relación

$$W_{1,t} = \sqrt{2}\widetilde{W}_{1,2t+1}, t = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1, \quad (3.19)$$

técnica que se conoce como “*downsampling por 2*” de la secuencia $\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t}$, que es el resultado del filtrado anterior.

Hemos obtenido los coeficientes de la DWT de escala unidad dados por

$$\mathbf{W}_1^T = [W_0, \dots, W_{\frac{N}{2}-1}] = [W_{1,0}, \dots, W_{1,\frac{N}{2}-1}]$$

que definen implícitamente las $\frac{N}{2}$ primeras filas de \mathcal{W} , dadas por \mathcal{W}_1 (véase ecuación (3.3)).

Para obtenerlas, escribimos

$$W_{1,t} = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^o X_{2t+1-l \pmod N}, \quad t = 0, \dots, \frac{N}{2} \quad (3.20)$$

donde $\{h_l^o\}$ es el filtro periodizado de longitud N de $\{h_l\}$.

De la ecuación de análisis se obtiene que

$$W_{1,t} = \mathcal{W}_{t\bullet}^T \mathbf{X} \quad (3.21)$$

o equivalentemente

$$\sum_{l=0}^{N-1} h_l^o X_{2t+1-l \pmod N} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{2t+1-l \pmod N}^o X_l, \quad t = 0, \dots, \frac{N}{2}$$

debido a la simetría de la convolución. Haciendo $t = 0$ resulta que

$$\mathcal{W}_{0\bullet}^T = [h_1^o, h_0^o, h_{N-1}^o, \dots, h_2^o]. \quad (3.22)$$

De la ecuación (3.21) se sigue que

$$\mathcal{W}_{t\bullet}^T = [\mathcal{T}^{2t} \mathcal{W}_{0\bullet}]^T, \quad t = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.23)$$

donde \mathcal{T} es la traslación a la derecha (transformación descrita en (2.5)).

Con las ecuaciones (3.22) y (3.23) y las propiedades (3.13b) y (3.13c) se comprueba que las filas definidas conforman un sistema ortonormal de vectores.

Como hemos definido los coeficientes de la DWT en términos de la salida de un filtro, veamos como se puede interpretar este hecho. Sea

$$\mathcal{X}_k = \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i2\pi f \frac{kt}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

la ODFT de $\{X_t\}$. En virtud del teorema de Parseval obtenemos que

$$\varepsilon_{\mathbf{X}} = \sum_{t=0}^{N-1} X_t^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\mathcal{X}_k|^2 \quad (3.24)$$

por lo que $\frac{|\mathcal{X}_k|^2}{N}$ define el espectro de potencia de energía sobre las frecuencias $\frac{k}{N}$. Considerando el resultado de filtrar circularmente $\{X_t\}$ con $\{h_l\}$ resulta

$$\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l X_{t-l \bmod N} = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^o X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.25)$$

de lo que se concluye, teniendo en cuenta el resultado acerca de la función transferencia de un filtrado descrito en la ecuación (1.7), que

$$\{\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t}\} \longleftrightarrow \{H(\frac{k}{N})\mathcal{X}_k\}$$

donde la ODFT de $\{h_l\}$ es $\{H(\frac{k}{N})\}$.

Aplicando otra vez el teorema de Parseval

$$2 \sum_{t=0}^{N-1} \widetilde{W}_{1,t}^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |H(\frac{k}{N})\mathcal{X}_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N})|\mathcal{X}_k|^2, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.26)$$

De las ecuaciones (3.25) y (3.26) se deduce que el espectro de energía de la salida del filtrado es justamente $\mathcal{H}(\frac{k}{N})$ veces al de la entrada del mismo.

En la práctica se usa un filtro $\{h_l\}$ que sea de paso alto con ancho de banda $|f| \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ porque como se verá en la sección siguiente, el filtro escala asociado a $\{h_l\}$, denotado por $\{g_l\}$, resultará ser un filtro paso bajo con ancho de banda $|f| \in [0, \frac{1}{4}]$. Así, al filtrar la serie \mathbf{X} con $\{h_l\}$ y $\{g_l\}$ se obtendrá una descomposición de la serie a mitad de banda, hecho en el que consiste esencialmente la primera etapa del algoritmo piramidal.

3.4.2. El filtro escala.

Para definir los $\frac{N}{2}$ filas restantes de \mathcal{W} , vía el algoritmo piramidal, necesitamos un nuevo filtro denominado **filtro escala** que viene dado por $\{g_l\}$ donde

$$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l},$$

cuya relación inversa es

$$h_l = (-1)^l g_{L-1-l}.$$

Ejemplo 3.4.1. Consideremos dos ejemplos.

- El filtro wavelet de Haar viene dado por

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad h_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

y el correspondiente filtro escala de Haar es

$$g_0 = -h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad g_1 = h_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- Por otra parte para filtro wavelet de $D(4)$ tenemos

$$h_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_1 = \frac{\sqrt{3}-3}{4\sqrt{2}}, \quad h_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad h_3 = \frac{-1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},$$

siendo el filtro escala asociado el dado por

$$g_0 = -h_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g_1 = h_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g_2 = -h_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad g_3 = h_0 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

La función de transferencia del filtro escala viene dada por

$$G(f) = e^{-i2\pi f(L-1)} H\left(\frac{1}{2} - f\right), \quad (3.27)$$

de donde

$$\mathcal{G}(f) = |G(f)|^2 = |H\left(\frac{1}{2} - f\right)|^2 = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2} - f\right), \quad (3.28)$$

de la que se deduce que si $\{h_l\}$ se trata de un filtro de paso alto entonces $\{g_l\}$ es de paso bajo. En la figura 3.11 (página 181) se observa un ejemplo de $\{h_l\}$ que es una aproximación a un filtro de paso alto con ancho de banda $\frac{1}{4} \leq |f| \leq \frac{1}{2}$ y $\{g_l\}$ resulta ser una aproximación de un filtro de paso bajo con ancho de banda $0 \leq |f| \leq \frac{1}{4}$. A este tipo de filtros se les llama filtros a mitad de banda porque dividen el intervalo de frecuencias $[0, \frac{1}{2}]$ a la mitad.

Observación 3.4.2. Existe una forma alternativa para definir el filtro escala,

$$g_l = (-1)^{l-1} h_{1-l},$$

cuya relación inversa es

$$h_l = (-1)^l g_{1-l},$$

que es especialmente útil en filtros de anchura infinita.

Formas alternativas de expresar la ecuación (3.16), usando la ecuación (3.28) y el hecho de que $\mathcal{G}(\cdot)$ y $\mathcal{H}(\cdot)$ son periódicas con período unidad, son

$$\mathcal{G}(f) + \mathcal{G}\left(\frac{1}{2} + f\right) = 2 \quad , \quad \mathcal{H}(f) + \mathcal{G}(f) = 2 \quad (3.29)$$

De la prueba descrita en la página 161 y la ecuación anterior se siguen las dos últimas propiedades de los filtros escala que se enuncian a continuación

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad \sum_{l=0}^{L-1} g_l = -\sqrt{2}, \quad (3.30a)$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} g_l^2 = 1, \quad (3.30b)$$

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l g_{l+2n} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l g_{l+2n} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \quad (3.30c)$$

siendo adoptado por convenio en (3.30a) que $\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}$. Anotar que la propiedad (3.30a) se deduce de la ecuación (3.29) tomando $f = 0$ y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(0) &= |H(0)|^2 = \left(\sum_{l=0}^{L-1} h_l \right)^2 = 0, \\ \mathcal{G}(0) &= |G(0)|^2 = \left(\sum_{l=0}^{L-1} g_l \right)^2.\end{aligned}$$

Nos proponemos ahora definir una matriz de dimensión $\frac{N}{2} \times N$, \mathcal{V}_1 , que nos permita construir, por transformaciones elementales, el resto de filas de \mathcal{W} .

Aplicaremos el mismo procedimiento para construirla que el empleado para construir \mathcal{W}_1 .

$$\sqrt{2}\tilde{V}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.31)$$

$$V_{1,t} = \sqrt{2}\tilde{V}_{1,2t+1} = \sum_{l=0}^{N-1} g_l^\circ X_{2t+1-l \bmod N}, \quad t = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.32)$$

donde $\{g_l^\circ\}$ es el filtro periodizado de longitud N de $\{g_j\}$. Obtenemos para $t = 0$ que

$$\mathcal{V}_{0\bullet}^T = [g_1^\circ, g_0^\circ, g_{N-1}^\circ, \dots, g_2^\circ] \quad (3.33)$$

y además

$$\mathcal{V}_{t\bullet}^T = [\mathcal{T}^{2t}\mathcal{V}_{0\bullet}]^T, \quad t = 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (3.34)$$

De igual forma que en el caso de \mathcal{W}_1 , se prueba que las filas definidas son un conjunto ortonormal; además es ortnormal a las filas de \mathcal{W}_1 . Hemos definido una matriz

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix}$$

que es ortonormal siendo un hecho fundamental para ello que N sea par. Veámoslo.

Primero probaremos que las filas de \mathcal{W}_1 son ortonormales. De las ecuaciones (3.22) y (3.23) se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{W}_{t\bullet}, \mathcal{W}_{t'\bullet} \rangle &= \langle \mathcal{T}^{2t}\mathcal{W}_{0\bullet}, \mathcal{T}^{2t'}\mathcal{W}_{0\bullet} \rangle = \mathcal{W}_{0\bullet}\mathcal{T}^{-2t}\mathcal{T}^{2t'}\mathcal{W}_{0\bullet} = \\ &= \mathcal{W}_{0\bullet}\mathcal{T}^{2(t'-t)}\mathcal{W}_{0\bullet} = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^\circ h_{l+2(t'-t)}^\circ\end{aligned}$$

con lo cual debemos probar que

$$h^\circ \star h_l^\circ = \sum_{k=0}^{N-1} h_k^\circ h_{k+l}^\circ = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ 0 & , k = 2, 4, \dots, N-2 \end{cases}$$

Sabemos que

$$\{h^o \star h_l^o\} \longleftrightarrow \{|H(\frac{k}{N})|^2 = \mathcal{H}(\frac{k}{N})\}$$

por lo tanto, de la relación inversa de la DWT y separando la suma resulta

$$\begin{aligned} h^o \star h_l^o &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N}) e^{i2\pi l \frac{k}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N}) e^{i2\pi l \frac{k}{N}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N} + \frac{1}{2}) e^{i2\pi l (\frac{k}{N} + \frac{1}{2})} \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Cuando $l = 0$ se tiene que, usando la ecuación (3.16)

$$h^o \star h_0^o = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N}) + \mathcal{H}(\frac{k}{N} \frac{1}{2}) = 1$$

mientras que para $l = 2t$ resulta

$$h^o \star h_{2t}^o = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N}) e^{i4\pi t \frac{k}{N}} + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathcal{H}(\frac{k}{N} + \frac{1}{2}) e^{i4\pi t \frac{k}{N}} e^{i2\pi t} = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} e^{i4\pi t \frac{k}{N}} = 0$$

debido a la suma de una serie geométrica. Análogamente se prueba que las filas de \mathcal{V}_1 son ortonormales.

Finalmente probemos que las filas de \mathcal{W}_1 son ortogonales a las de \mathcal{V}_1 . De las ecuaciones (3.33) y (3.34) se sigue que, para $n = t' - t$,

$$\langle \mathcal{V}_{t\bullet}, \mathcal{V}_{t'\bullet} \rangle = \langle \mathcal{T}^{2t} \mathcal{V}_{0\bullet}, \mathcal{T}^{2t'} \mathcal{V}_{0\bullet} \rangle = \mathcal{V}_{0\bullet} \mathcal{T}^{2n} \mathcal{V}_{0\bullet} = \sum_{l=0}^{N-1} g_l^o h_{l+2n}^o \pmod{N} = g^o \star h_{2n}^o$$

siendo $\{g^o \star h_l^o\}$ la correlación cruzada circular de $\{g_l^o\}$ y $\{h_l^o\}$ pues g_l^o es valuada real. Considerando que

$$\{g_l^o\} \longleftrightarrow \{G(\frac{k}{N})\} \quad , \quad \{h_l^o\} \longleftrightarrow \{H(\frac{k}{N})\}$$

se sigue que

$$\{g^o \star h_l^o\} \longleftrightarrow \{G^*(\frac{k}{N}) H(\frac{k}{N})\}$$

(véase ecuaciones (1.14) y (1.16)).

En virtud de la relación inversa de la DFT, utilizando el mismo argumento de separación de la suma que en (3.35) obtenemos que

$$g^o \star h_{2n}^o = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} [G^*(\frac{k}{N}) H(\frac{k}{N}) + G^*(\frac{k}{N} + \frac{1}{2}) H(\frac{k}{N} + \frac{1}{2})] e^{i4\pi n \frac{k}{N}},$$

y como

$$[G^*(\frac{k}{N}) H(\frac{k}{N}) + G^*(\frac{k}{N} + \frac{1}{2}) H(\frac{k}{N} + \frac{1}{2})] = 0$$

sin más que utilizar la ecuación (3.28) y que las funciones de transferencia tienen período unidad así como que satisfacen (1.2b), se obtiene que

$$g^o \star h_{2n}^o = 0, \quad n = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

que es lo buscado.

Finalmente apuntar que en la literatura de ingeniería (véase [9] y [10]), al filtro wavelet se le conoce como *filtro madre* y al de escala, como *filtro padre*.

3.4.3. Primera etapa del algoritmo piramidal.

La primera etapa del algoritmo piramidal para el cómputo de la DWT consiste en transformar la serie \mathbf{X} de $N = 2^J$ elementos en los $\frac{N}{2}$ coeficientes de primer nivel de la DWT, \mathbf{W}_1 y los $\frac{N}{2}$ coeficientes de escala, \mathbf{V}_1 . Restan $J - 1$ etapas del algoritmo.

Para $j = 2, \dots, J$, la j -ésima etapa del algoritmo transforma el vector \mathbf{V}_{j-1} , de longitud $\frac{N}{2^{j-1}}$, en los vectores \mathbf{W}_j y \mathbf{V}_j , cada uno de longitud $\frac{N}{2^j}$, obtenidos de idéntica forma que se obtuvieron \mathbf{W}_1 y \mathbf{V}_1 a partir de \mathbf{X} . Los elementos de \mathbf{W}_j se denominan *coeficientes DWT de nivel j* de \mathbf{X} mientras que los de \mathbf{V}_j , *coeficientes de escala de nivel j* de \mathbf{X} . Al final de la J -ésima etapa del algoritmo obtendremos \mathbf{W} concatenando los $J + 1$ vectores $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_J$.

En lo sucesivo, analizaremos la ecuación de síntesis de \mathbf{X} a partir de \mathcal{W}_1 y \mathcal{V}_1 . Tenemos que, dado que \mathcal{P}_1 es ortonormal,

$$\mathbf{X} = \mathbb{P}_1^T \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = [\mathcal{W}_1^T, \mathcal{V}_1^T] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \mathcal{W}_1^T \mathbf{W}_1 + \mathcal{V}_1^T \mathbf{V}_1 \quad (3.36)$$

pues

$$\mathbb{P}_1 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \mathbf{X} \\ \mathcal{V}_1 \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}.$$

De la ecuación (3.5) y la definición de \mathcal{S}_1 resulta que

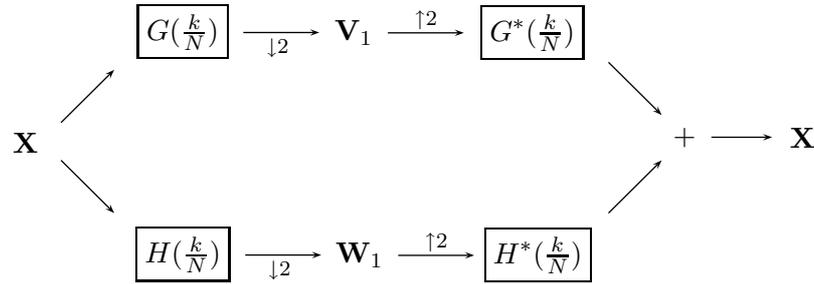
$$\mathbf{X} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_1 \quad (3.37)$$

resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1 &= \mathcal{W}_1^T \mathbf{W}_1 = \mathcal{W}_1^T \mathcal{W}_1 \mathbf{X} \\ \mathcal{S}_1 &= \mathcal{V}_1^T \mathbf{V}_1 = \mathcal{V}_1^T \mathcal{V}_1 \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Podemos escribir por tanto que

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} h_{2l+1} W_{1, \frac{t}{2}+l \pmod{\frac{N}{2}}} + \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} g_{2l+1} V_{1, \frac{t}{2}+l \pmod{\frac{N}{2}}}, \quad t = 0, 2, 4, \dots, N-2 \\ X_t &= \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} h_{2l} W_{1, \frac{t-1}{2}+l \pmod{\frac{N}{2}}} + \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} g_{2l} V_{1, \frac{t-1}{2}+l \pmod{\frac{N}{2}}}, \quad t = 1, 3, 5, \dots, N-1, \end{aligned}$$



Cuadro 3.1: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de \mathbf{X} en \mathbf{W}_1 y \mathbf{V}_1 y la síntesis de éstos en \mathbf{X} . Aquí, ' $\downarrow 2$ ' significa "downsampling por 2" mientras que ' $\uparrow 2$ ', "upsampling por 2".

sin embargo si denotamos

$$W_{1,t}^{\uparrow} = \begin{cases} 0 & , t = 0, 2, \dots, N-2 \\ W_{1, \frac{t-1}{2}} & , t = 1, 3, \dots, N-1 \end{cases}$$

que se conoce como "upsampling por 2" de la secuencia $W_{1,t}$, resulta que

$$\mathcal{D}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l W_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^o W_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N \quad (3.38)$$

$$\mathcal{S}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N = \sum_{l=0}^{N-1} g_l^o V_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N \quad (3.39)$$

para $t = 0, \dots, N-1$, obteniéndose que

$$X_t = \sum_{l=0}^{N-1} h_l^o W_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N + \sum_{l=0}^{N-1} g_l^o V_{1,t+l}^{\uparrow} \bmod N, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.40)$$

En la figura 3.1 se ilustran las operaciones realizadas para el análisis de \mathbf{X} en \mathbf{W}_1 y \mathbf{V}_1 y la síntesis de $\mathbf{W}_1, \mathbf{V}_1$ en \mathbf{X} .

Veamos en lo que sigue la relación entre las DFT's de \mathbf{X} (entrada de la primera etapa del algoritmo piramidal) y $\mathbf{W}_1, \mathbf{V}_1$ (salida de dicha etapa). Consideremos $\{X_t\} \longleftrightarrow \{\mathcal{X}_k\}$ la DFT de \mathbf{X} . Por la relación inversa de la DFT tenemos que

$$X_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_k e^{i2\pi t \frac{k}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \mathcal{X}_k e^{i2\pi t \frac{k}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

donde se ha hecho uso del hecho de que las secuencias $\{\mathcal{X}_k\}$ y $\{e^{i2\pi t \frac{k}{N}}\}$ son periódicas de periodo N (y por consiguiente su producto) por lo cual la suma de N términos contiguos es invariables. Como $\{\sqrt{2}\tilde{V}_{1,t}\}$ se obtiene filtrando $\{X_t\}$ con el filtro de paso bajo $\{g_l\}$ (con

paso de banda nominal $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$) y dado que $\{\mathcal{X}_k\}$ está asociado a la frecuencia $f_k = \frac{k}{N}$ se sigue que

$$\tilde{V}_{1,t} \approx \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{4}} \mathcal{X}_k e^{i2\pi t \frac{k}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

donde \approx representa “aproximadamente” y siendo la secuencia “downsampleada”

$$\begin{aligned} V_{1,t} &= \sqrt{2} \tilde{V}_{1,2t+1} \approx \frac{\sqrt{2}}{N} \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{4}} \mathcal{X}_k e^{i2\pi(2t+1) \frac{k}{N}} = \\ &= \frac{2}{N} \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{4}} \frac{\mathcal{X}_k e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}} e^{i2\pi t \frac{k}{\frac{N}{2}}} = \frac{1}{N'} \sum_{k=-\frac{N'}{2}+1}^{\frac{N'}{2}} \mathcal{X}'_k e^{i2\pi t \frac{k}{N'}} \end{aligned}$$

para $t = 0, \dots, \frac{N'}{2}-1$ donde $N' = \frac{N}{2}$ y $\mathcal{X}'_k = \frac{\mathcal{X}_k e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}}$ que están asociados a las frecuencias $f'_k = \frac{k}{N'} = 2f_k$ con $k = -\frac{N'}{2} + 1, \dots, \frac{N'}{2}$.

Obsérvese que mientras que $\{\tilde{V}_{1,t}\}$ se trata de una secuencia a mitad de banda (por ser la salida de un filtrado con ancho de banda $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$), la secuencia $\{V_{1,t}\}$ se trata de una secuencia de ancho completo pues f'_k recorre el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (recordemos que $f'_k = 2f_k$). Además, la transformada de Fourier de \mathbf{V}_1 coincide con la transformada de Fourier de la secuencia de $\frac{N}{2}$ términos

$$\left\{ \frac{\mathcal{X}_k e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}} : k = -\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{4} \right\}.$$

Con una línea similar de pensamiento tratamos los coeficientes wavelet. Como $\{\sqrt{2}\tilde{W}_{1,t}\}$ se obtiene filtrando $\{X_t\}$ con el filtro de paso alto $\{h_l\}$ (con ancho de bando $\frac{1}{4} \leq |f| \leq \frac{1}{2}$) se tiene que

$$\tilde{W}_{1,t} \approx \frac{1}{N} \left(\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-\frac{N}{4}} + \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{2}} \right) \mathcal{X}_k e^{i2\pi t \frac{k}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

por lo que la secuencia “downsampleada” resulta

$$\begin{aligned} W_{1,t} &= \sqrt{2} \tilde{W}_{1,2t+1} \approx \frac{\sqrt{2}}{N} \left(\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-\frac{N}{4}} + \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{2}} \right) \mathcal{X}_k e^{i2\pi(2t+1) \frac{k}{N}} = \\ &= \frac{2}{N} \left(\sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{-\frac{N}{4}} + \sum_{k=-\frac{N}{4}+1}^{\frac{N}{2}} \right) \frac{\mathcal{X}_k e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}} e^{i2\pi t \frac{k}{\frac{N}{2}}} = \frac{1}{N'} \sum_{k=-\frac{N'}{2}+1}^{\frac{N'}{2}} \mathcal{X}'_k e^{i2\pi t \frac{k}{N'}} \end{aligned}$$

para $t = 0, \dots, \frac{N}{2} - 1$ donde $N' = \frac{N}{2}$ y $\mathcal{X}'_k = \frac{\mathcal{X}_{k+\frac{N}{2}} e^{i2\pi \frac{k+\frac{N}{2}}{N}}}{\sqrt{2}} = -\frac{\mathcal{X}_{k+\frac{N}{2}} e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}}$ que están asociados a las frecuencias $f'_k = \frac{k}{N'} = 2(\frac{1}{2} - f_k)$ con $k = -\frac{N'}{2} + 1, \dots, \frac{N'}{2}$.

Análogamente, mientras que $\{\widetilde{W}_{1,t}\}$ se trata de una secuencia a mitad de banda (por ser la salida de un filtrado con ancho de banda $\frac{1}{4} \leq |f| \leq \frac{1}{2}$), la secuencia $\{W_{1,t}\}$ se trata de una secuencia de ancho completo pues f'_k recorre el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (recordemos que $f'_k = 2(\frac{1}{2} - f_k)$). Además las frecuencias $f_k \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ correspondientes a la representación de Fourier de $\{X_t\}$ se aplican en orden inverso sobre las frecuencias $f'_k \in [0, \frac{1}{2}]$ correspondientes a la representación de Fourier de $\{W_{1,t}\}$.

Como antes, de aquí se deduce que la transformada de Fourier de \mathbf{W}_1 coincide con la transformada de Fourier de la secuencia de $\frac{N}{2}$ términos

$$\left\{ -\frac{\mathcal{X}_{k+\frac{N}{2}} e^{i2\pi \frac{k}{N}}}{\sqrt{2}} : k = -\frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{N}{4} \right\}.$$

3.4.4. Segunda etapa del algoritmo piramidal.

La segunda etapa del algoritmo piramidal consiste en tratar la secuencia

$$\mathbf{V}_1^T = [V_{1,0}, \dots, V_{1,\frac{N}{2}-1}]$$

de la misma forma que fue tratada $\{X_t\}$ en la primera etapa.

Filtrándola con $\{h_l\}$ y $\{g_l\}$ y “downsampleando por 2” obtenemos que

$$W_{2,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{1,2t+1-l \bmod \frac{N}{2}} \quad (3.41)$$

$$V_{2,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{1,2t+1-l \bmod \frac{N}{2}} \quad (3.42)$$

para $t = 0, \dots, \frac{N}{4} - 1$

Obtenemos, por tanto, que los coeficientes de la DWT de nivel 2 resultan

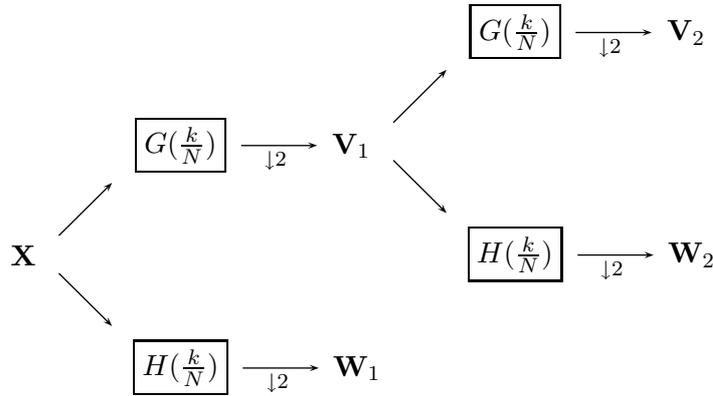
$$\mathbf{W}_2 = [W_{\frac{N}{2}}, \dots, W_{\frac{3N}{4}-1}]^T = [W_{2,0}, \dots, W_{2,\frac{N}{4}-1}]^T \quad (3.43)$$

mientras que los coeficientes de escala de nivel 2 son

$$\mathbf{V}_2 = [V_{2,0}, \dots, V_{2,\frac{N}{4}-1}]^T. \quad (3.44)$$

Consideremos \mathcal{A}_2 y \mathcal{B}_2 matrices de orden $\frac{N}{4} \times \frac{N}{2}$ cuyas filas consistan en las versiones circulares trasladadas de $\{g_l\}$ y $\{h_l\}$ respectivamente, periodizados de longitud $\frac{N}{2}$. Tenemos que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_2 \\ \mathbf{V}_2 \end{bmatrix} = \mathbb{P}_2 \mathbf{V}_1 \quad \text{con} \quad \mathbb{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{A}_2 \end{bmatrix}$$



Cuadro 3.2: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de \mathbf{X} en \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 y \mathbf{V}_2 .

donde se prueba de manera análoga a \mathbb{P}_1 que la matriz \mathbb{P}_2 es ortonormal.

Observación 3.4.3. En adelante, a fin de homogeneizar la notación para las siguientes etapas del algoritmo, denotaremos

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{V}_1 \quad , \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{W}_1$$

resultando que

$$\mathbb{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Considerando la notación anterior, sustituyendo en la ecuación (3.36) se tiene que

$$\mathbf{X} = \mathcal{B}_1^T \mathbf{W}_1 + \mathcal{A}_1^T \mathcal{B}_2^T \mathbf{W}_2 + \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T \mathbf{V}_2 \quad (3.45)$$

que de compararla con la ecuación (3.2) se infiere que $\mathcal{W}_2 = \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1$, y por tanto

$$\mathcal{D}_2 = \mathcal{W}_2^T \mathbf{W}_2 = \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T$$

que al ser, $\mathcal{D}_1 = \mathcal{W}_1^T \mathbf{W}_1 = \mathcal{B}_1^T \mathbf{X}$, obtenemos que

$$\mathbf{X} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T \mathbf{V}_2 = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2 + \mathcal{S}_2$$

con lo que

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T \mathbf{V}_2 = \mathcal{V}_2^T \mathbf{V}_2$$

donde $\mathcal{V}_2 = \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1$.

En la figuras 3.2 y 3.3 se ilustran las operaciones realizadas para el análisis de \mathbf{X} en \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 y \mathbf{V}_2 así como la síntesis de \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 y \mathbf{V}_2 en \mathbf{X} .

En lo que sigue, dado que las secuencias $\{W_{2,t}\}$ y $\{V_{2,t}\}$ se obtienen filtrando $\{V_{1,t}\}$ y “downsampleando” y a su vez $\{V_{1,t}\}$ se tiene filtrando $\{X_t\}$ y “downsampleando”, utilizaremos la noción de cascada de filtros para describir cómo $\{W_{2,t}\}$ y $\{V_{2,t}\}$ pueden ser

obtenidos filtrando directamente $\{X_t\}$ si de alguna forma podemos tener en cuenta la operación de “downsampling”. Para hacerlo, consideremos el filtro $\{h_l^\uparrow\}$ de anchura $2L-1$ definido por

$$\{h_l^\uparrow\} = \{h_0, 0, h_1, 0, \dots, h_{L-2}, 0, h_{L-1}\}$$

que se obtiene insertando un cero entre cada dos elementos de $\{h_l\}$. Sea

$$2\widetilde{W}_{2,t} = \sum_{l=0}^{2L-1} h_l^\uparrow \sqrt{2} \widetilde{V}_{1,t-l} \pmod{N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \quad (3.46)$$

que como la ecuación (3.31) establece que $\{\sqrt{2}\widetilde{V}_{1,t}\}$ se obtiene filtrando $\{X_t\}$ con $\{g_l\}$, entonces $\{\sqrt{2}\widetilde{W}_{2,t}\}$ es la salida de una cascada de filtros cuya entrada es $\{X_t\}$ que es objeto de filtrado por $\{g_l\}$ primero y por $\{h_l^\uparrow\}$. Afirmamos que

$$W_{2,t} = 2\widetilde{W}_{2,4t+3}, \quad t = 0, \dots, \frac{N}{4} - 1 \quad (3.47)$$

que se trata de un “downsampleo” por 4. Es fácil probar, con la ecuación (3.46) y la definición de $\{h_l^\uparrow\}$, que lo anterior es cierto.

Sea $\{h_{2,l}\} = \{g \star h_l^\uparrow\}$ la convolución de $\{g_l\}$ con $\{h_l^\uparrow\}$. Como $\{g_l\}$ tiene anchura L y $\{h_l^\uparrow\}$, $2L-1$ se sigue fácilmente que $\{h_{2,l}\}$ tiene anchura

$$L_2 = L + (2L-1) - 1 = 3L-2$$

(véase ecuación (1.11)).

Observación 3.4.4. Si tenemos un filtro $\{h_l\}$ con función de transferencia $H(\cdot)$ y definimos el filtro

$$h_0, \underbrace{0, \dots, 0}_m, h_2, \dots, h_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_m, h_{L-1}$$

se tiene que su función de transferencia es $H([m+1]f)$

Tomando $m=1$ en la observación anterior, tenemos que la función de transferencia de $\{h_{2,l}\}$ viene dada por

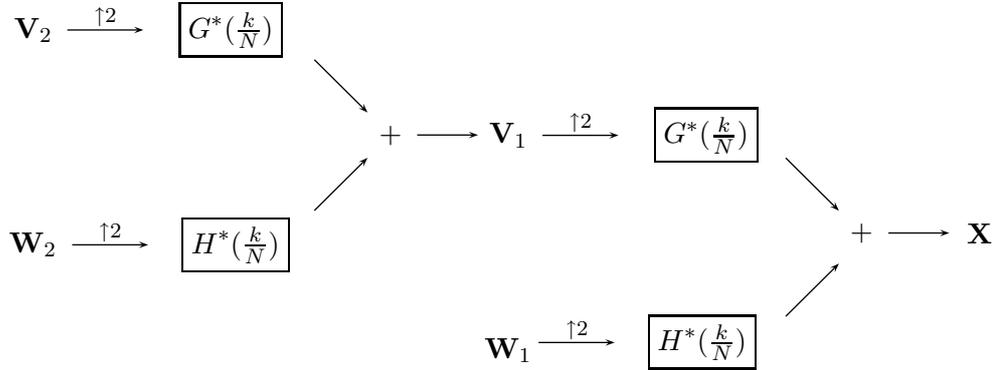
$$H_2(f) = H(2f)G(f).$$

De forma análoga se obtiene que el filtro equivalente $\{g_{2,l}\}$ asociado a la obtención de $\{V_{2,t}\}$ a partir de $\{X_t\}$ cuya anchura es L_2 obtenida de convolucionar $\{g_l\}$ con

$$\{g_l^\uparrow\} = \{g_0, 0, g_1, 0, \dots, g_{L-2}, 0, g_{L-1}\}$$

y que tiene por función de transferencia a

$$G_2(f) = G(2f)G(f).$$



Cuadro 3.3: Diagrama de flujo ilustrando la síntesis de \mathbf{W}_1 , \mathbf{W}_2 y \mathbf{V}_2 en \mathbf{X} .

Por conveniencia, llamaremos a $\{h_{2,l}\}$ y $\{g_{2,l}\}$ los *filtros wavelet y escala de nivel 2* respectivamente ya que producen los coeficientes wavelet y de escala de segundo nivel aunque no cumplan la condición de ortogonalidad a sus trasladadas de índice par, tercera condición de un filtro. Para homogeneizar la notación escribiremos

$$\{h_{1,l}\} = \{h_l\} \quad , \quad \{g_{1,l}\} = \{g_l\}.$$

Como los elementos de \mathbf{W}_2 se obtienen filtrando circularmente $\{X_t\}$ con $\{h_{2,l}\}$, también pueden ser obtenidos filtrándolos circularmente con la versión periodizada de longitud N , es decir tenemos que

$$W_{2,t} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{2,l}^o X_{4(t+1)-1-l \pmod N}, \quad t = 0, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

y si observamos que

$$W_{2,0} = \sum_{l=0}^{N-1} h_{2,l}^o X_{3-l \pmod N}$$

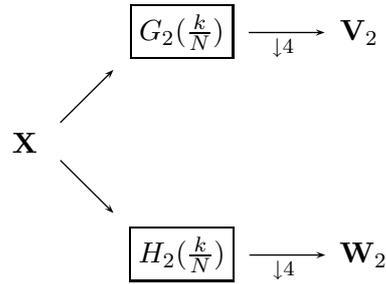
dado que $\mathbf{W}_2 = \mathcal{W}_2 \mathbf{X}$, resulta que la primera fila de \mathcal{W}_2 (o equivalentemente la fila $\frac{N}{2}$ de \mathcal{W}) viene dada por

$$\mathcal{W}_{\frac{N}{2}, \bullet}^T = [h_{2,3}^o, h_{2,2}^o, h_{2,1}^o, h_{2,0}^o, h_{2,N-1}^o, \dots, h_{2,5}^o, h_{2,4}^o]$$

y el resto de filas por

$$\mathcal{W}_{\frac{N}{2}+k, \bullet}^T = \mathcal{T}^{4k} \mathcal{W}_{\frac{N}{2}, \bullet}^T, \quad k = 1, \dots, \frac{N}{4} - 1$$

La figura 3.4 ilustra lo expuesto.



Cuadro 3.4: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de \mathbf{X} en \mathbf{W}_2 y \mathbf{V}_2 directamente. En este caso se filtra $\{X_t\}$ por las versiones periodizadas de longitud N de las secuencias $\{h_{2,l}\}$ y $\{g_{2,l}\}$ cuyas funciones de transferencia son $H_2\left(\frac{k}{N}\right)$ y $G_2\left(\frac{k}{N}\right)$. Los elementos de la serie filtrada con $\{h_{2,l}\}$ cuyos índices satisfacen que $t+1 \pmod 4 = 0$ (se conoce por “downsamplear por 4 empezando por 1”) forman los coeficientes wavelet de nivel 2, \mathbf{W}_2 . Análogo con \mathbf{V}_2 y el filtro $\{g_{2,l}\}$.

3.4.5. Etapa general del algoritmo piramidal.

Tras la discusión hecha en las secciones precedentes, estamos en disposición de generalizar la j -ésima del algoritmo piramidal, para $j = 1, \dots, J$. Recordemos que $N = 2^J$, donde $V_{0,t} = X_t$.

La entrada de la j -ésima etapa del algoritmo es $\{V_{j-1,t}/j = 0, \dots, N_{j-1} - 1\}$ donde $N_j = \frac{N}{2^j}$ que corresponden a los coeficientes de escala de nivel $j-1$ y asociados a $\lambda_{j-1} = 2^{j-1}$. Las salidas de dicha etapa son los **coeficientes wavelet y de escala de nivel j** y están dados por

$$W_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l V_{j-1,2t+1-l \pmod{N_{j-1}}} \quad (3.48)$$

$$V_{j,t} = \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j-1,2t+1-l \pmod{N_{j-1}}} \quad (3.49)$$

para $t = 0, \dots, N_j - 1$ teniéndose que, para escala $\tau_j = 2^{j-1}$

$$\mathbf{W}_j = [W_{N-N_{j-1}}, W_{N-N_{j-1}+1}, \dots, W_{N-N_{j-1}}]^T = [W_{j,0}, \dots, W_{j,N_j-1}]^T$$

y similarmente con \mathbf{V}_j^T y los $V_{j,t}$.

La transformación que obtiene \mathbf{W}_j y \mathbf{V}_j a partir de \mathbf{V}_{j-1} puede expresarse por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_j \\ \mathbf{V}_j \end{bmatrix} = \mathcal{P}_j \mathbf{V}_{j-1} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_j \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix} \mathbf{V}_{j-1} \quad \text{con} \quad \mathcal{P}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_j \\ \mathcal{A}_j \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

donde \mathcal{B}_j y \mathcal{A}_j son matrices de dimensión $N_j \times N_{j-1}$ cuyas filas contienen, respectivamente, versiones trasladadas circularmente de los filtros wavelet y de escala periodizados

a longitud N_{j-1} . La matriz \mathcal{P}_j de dimensión $N_{j-1} \times N_{j-1}$ es ortonormal y por ello

$$\mathbf{V}_{j-1} = \mathcal{P}_j^T \begin{bmatrix} \mathbf{W}_j \\ \mathbf{V}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_j^T & \mathcal{A}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_j \\ \mathbf{V}_j \end{bmatrix} = \mathcal{B}_j^T \mathbf{W}_j + \mathcal{A}_j^T \mathbf{V}_j \quad (3.51)$$

teniéndose además que

$$\|\mathbf{V}_{j-1}\|^2 = \|\mathbf{W}_j\|^2 + \|\mathbf{V}_j\|^2 \quad (3.52)$$

Si recordamos que $\mathbf{V}_1 = \mathcal{A}_j \mathbf{V}_{j-1}$, aplicando recursivamente que $\mathbf{V}_j = \mathcal{A}_j \mathbf{V}_{j-1}$, resulta que

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_j &= \mathcal{B}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \mathbf{X} = \mathcal{W}_j \mathbf{X} \\ \mathbf{V}_j &= \mathcal{A}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \mathbf{X} = \mathcal{V}_j \mathbf{X} \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{W}_j = \mathcal{B}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \quad , \quad \mathcal{V}_j = \mathcal{A}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1$$

En términos de operaciones de filtrado, el t -ésimo elemento de \mathbf{V}_{j-1} puede reconstruirse con una ecuación análoga a (3.40),

$$V_{j-1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} h_l W_{j,t+l}^{\uparrow} \bmod N_{j-1} + \sum_{l=0}^{L-1} g_l V_{j,t+l}^{\uparrow} \bmod N_{j-1}, \quad t = 0, \dots, N_{j-1} - 1 \quad (3.53)$$

donde

$$W_{j,t}^{\uparrow} = \begin{cases} 0, & t = 0, 2, \dots, N_{j-1} - 2 \\ W_{j, \frac{t-1}{2}}, & t = 1, 3, \dots, N_{j-1} - 1 \end{cases}$$

definiéndose $V_{j,t}^{\uparrow}$ de forma análoga.

La ecuación (3.36), con aplicación recursiva de la ecuación (3.53), resulta en

$$\mathbf{X} = \mathcal{B}_1^T \mathbf{W}_1 + \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T \mathbf{W}_2 + \mathcal{A}_1^T \mathcal{A}_2^T \mathcal{B}_3^T \mathbf{W}_3 + \cdots + \mathcal{A}_1^T \cdots \mathcal{A}_{j-1}^T \mathcal{B}_j^T \mathbf{W}_j + \mathcal{A}_1^T \cdots \mathcal{A}_{j-1}^T \mathcal{A}_j^T \mathbf{V}_j$$

donde el detalle \mathcal{D}_j y la componente suave \mathcal{S}_j vienen dados por los dos últimos términos anteriores respectivamente, esto es,

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{A}_1^T \cdots \mathcal{A}_{j-1}^T \mathcal{B}_j^T \mathbf{W}_j = \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j \quad (3.54)$$

$$\mathcal{S}_j = \mathcal{A}_1^T \cdots \mathcal{A}_{j-1}^T \mathcal{A}_j^T \mathbf{V}_j = \mathcal{V}_j^T \mathbf{V}_j \quad (3.55)$$

Aplicando recursivamente la ecuación (3.52) y considerando que $\mathbf{V}_0 = \mathbf{X}$ resulta

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{k=1}^j \|\mathbf{W}_k\|^2 + \|\mathbf{V}_j\|^2 \quad (3.56)$$

de donde se sigue con las ecuaciones (3.54) y (3.55) que

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{k=1}^j \|\mathcal{D}_k\|^2 + \|\mathcal{S}_j\|^2.$$

El filtro equivalente $\{h_{j,l}\}$ que relaciona $\{W_{j,t}\}$ con $\{X_t\}$ se forma convolucionando los siguientes j filtros

$$\begin{aligned}
\text{filtro 1: } & g_0, g_1, \dots, g_{L-2}, g_{L-1} \\
\text{filtro 2: } & g_0, 0, g_1, 0, \dots, g_{L-2}, 0, g_{L-1} \\
\text{filtro 3: } & g_0, 0, 0, 0, g_1, 0, 0, 0, \dots, g_{L-2}, 0, 0, 0, g_{L-1} \\
& \vdots \\
\text{filtro } j-1: & g_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, g_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, \dots, g_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, g_{L-1} \\
\text{filtro } j: & h_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, h_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, \dots, h_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, h_{L-1}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

que tiene por anchura

$$L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1 \tag{3.58}$$

debido a la ecuación (1.11) ya que las anchuras de los filtros anteriores son respectivamente

$$L, L + (L - 1), L + 3(L - 1), \dots, L + (2^{j-2} - 1)(L - 1), L + (2^{j-1} - 1)(L - 1)$$

y por función de transferencia

$$H_j(f) = H(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} G(2^l f). \tag{3.59}$$

Además el filtro $\{h_{j,l}\}$ es una aproximación a un filtro de paso alto y tiene un paso de banda nominal dado por $\frac{1}{2^{j+1}} \leq |f| \leq \frac{1}{2^j}$. Con la ecuación

$$\sqrt{2^j} \widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N - 1 \tag{3.60}$$

obtenemos que

$$W_{j,t} = \sqrt{2^j} \widetilde{W}_{j,2^j(t+1)-1} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{2^j(t+1)-1-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N_j - 1 \tag{3.61}$$

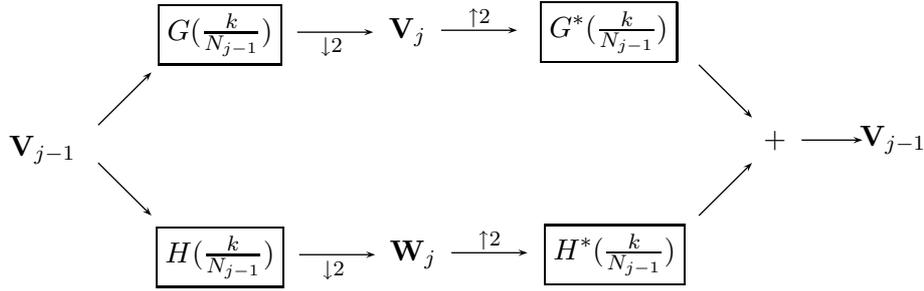
y como tenemos que $\mathbf{W}_j = \mathcal{W}_j \mathbf{X}$ se sigue que las filas de \mathcal{W}_j contienen las versiones periodizadas de longitud N de $\{h_{j,l}\}$, es decir $\{h_{j,l}^o\}$

$$(\mathcal{W}_j)_{0\bullet}^T = [h_{j,2^j-1}^o, h_{j,2^j-2}^o, \dots, h_{j,1}^o, h_{j,0}^o, h_{j,N-1}^o, \dots, h_{j,2^j+1}^o, h_{j,2^j}^o]$$

y las siguientes

$$(\mathcal{W}_j)_{k\bullet}^T = [\mathcal{T}^{k2^j} (\mathcal{W}_j)_{0\bullet}]^T, \quad k = 1, \dots, N_j - 1.$$

De forma análoga, el filtro equivalente $\{g_{j,l}\}$ del cual se obtiene $\{V_{j,t}\}$ sin más que filtrar $\{X_t\}$ se obtiene por convolución de los siguientes j filtros



Cuadro 3.5: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de \mathbf{V}_{j-1} en \mathbf{W}_j y \mathbf{V}_j y la síntesis de éstos en \mathbf{V}_{j-1}

$$\begin{aligned}
 \text{filtro 1 : } & g_0, g_1, \dots, g_{L-2}, g_{L-1} \\
 \text{filtro 2 : } & g_0, 0, g_1, 0, \dots, g_{L-2}, 0, g_{L-1} \\
 \text{filtro 3 : } & g_0, 0, 0, 0, g_1, 0, 0, 0, \dots, g_{L-2}, 0, 0, 0, g_{L-1} \\
 & \vdots \\
 \text{filtro } j-1 : & g_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, g_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, \dots, g_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-2}-1 \text{ ceros}}, g_{L-1} \\
 \text{filtro } j : & g_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, g_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, \dots, g_{L-2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{2^{j-1}-1 \text{ ceros}}, g_{L-1}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

teniendo anchura L_j y función de transferencia

$$G_j(f) = \prod_{l=0}^{j-1} G(2^l f). \tag{3.63}$$

Además el filtro $\{g_{j,l}\}$ es una aproximación a un filtro de paso bajo y tiene un paso de banda nominal dado por $0 \leq |f| \leq \frac{1}{2^{j+1}}$. Con la ecuación

$$\sqrt{2^j} \tilde{V}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1 \tag{3.64}$$

obtenemos que

$$V_{j,t} = \sqrt{2^j} \tilde{V}_{j,2^{j(t+1)-1}} = \sum_{l=0}^{L_j-1} g_{j,l} X_{2^{j(t+1)-1-l} \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N_j-1 \tag{3.65}$$

y como tenemos que $\mathbf{V}_j = \mathcal{V}_j \mathbf{X}$ se sigue que las filas de \mathcal{V}_j contienen las versiones periodizadas de longitud N de $\{g_{j,l}\}$, es decir $\{g_{j,l}^o\}$

$$(\mathcal{V}_j)_{1\bullet}^T = [g_{j,2^j-1}^o, g_{j,2^j-2}^o, \dots, g_{j,1}^o, g_{j,0}^o, g_{j,N-1}^o, \dots, g_{j,2^j+1}^o, g_{j,2^j}^o]$$

y las siguientes

$$(\mathcal{V}_j)_{k\bullet}^T = [\mathcal{T}^{k2^j}(\mathcal{V}_j)_{1\bullet}]^T, \quad k = 1, \dots, N_j - 1.$$

Finalmente, considerando nuestra asunción $N = 2^J$, tenemos que a la J -ésima etapa del algoritmo piramidal se obtienen \mathbf{W}_J y \mathbf{V}_J , ambos unidimensionales, que suponen el fin del mismo siendo éstos los coeficientes DWT W_{N-2} y W_{N-1} del vector $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$ asociados a cambios en escala $\tau_J = 2^{J-1} = \frac{N}{2}$, el primero de ellos y proporcional a la media de los datos, el segundo; a saber $W_{N-1} = \frac{\bar{X}}{\sqrt{N}}$.

En la última etapa obtenemos una expresión para todas las filas de \mathcal{W} dadas por

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_1 \\ \mathcal{W}_2 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_j \\ \vdots \\ \mathcal{W}_J \\ \mathcal{V}_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_j \mathcal{A}_{j-1} \cdots \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_J \mathcal{A}_{J-1} \cdots \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_J \mathcal{A}_{J-1} \cdots \mathcal{A}_1 \end{bmatrix}.$$

La figura 3.5 ilustra las operaciones realizadas para la obtención del análisis de \mathbf{V}_{j-1} dados por \mathbf{V}_j y \mathbf{W}_j ; así como la síntesis de éstos en \mathbf{V}_{j-1} .

Lo último que se expondrá es un pseudo-código del algoritmo para el cálculo de la DWT y su inversa de una serie \mathbf{X} , utilizando las ecuaciones (3.48) y (3.53), en $O(N)$ iteraciones y la modificación a realizar para que el mismo algoritmo compute \mathcal{D}_j y \mathcal{S}_J .

Dado el vector \mathbf{V}_{j-1} de dimensión $M = \frac{N}{2^{j-1}}$ se obtiene \mathbf{W}_j y \mathbf{V}_j , cada uno de dimensión $\frac{M}{2}$, mediante el algoritmo siguiente.

Algoritmo 3.4.1 (Algoritmo de análisis)

Para $t = 0, \dots, \frac{M}{2} - 1$, hacer
 $\mathbf{u} = 2t + 1$
 $\mathbf{W}_{j,t} = \mathbf{h}_0 \mathbf{V}_{j-1,u}$
 $\mathbf{V}_{j,t} = \mathbf{g}_0 \mathbf{V}_{j-1,u}$
 Para $n = 0, \dots, L - 1$, hacer
 $\mathbf{u} = \mathbf{u} - 1$
 Si $\mathbf{u} < 0$ entonces $\mathbf{u} = M - 1$
 $\mathbf{W}_{j,t} = \mathbf{W}_{j,t} + \mathbf{h}_n \mathbf{V}_{j-1,u}$
 $\mathbf{V}_{j,t} = \mathbf{V}_{j,t} + \mathbf{g}_n \mathbf{V}_{j-1,u}$

Dado los vectores \mathbf{W}_j y \mathbf{V}_j de dimensión $M' = \frac{N}{2^j}$ se obtiene \mathbf{V}_{j-1} de dimensión $2M'$ con el algoritmo que sigue.

Algoritmo 3.4.2 (Algoritmo de síntesis)

```

l = -2
m = -1
Para t = 0, ..., M' - 1, hacer
    m = m + 2
    l = l + 2
    u = t
    i = 1
    k = 0
    Vj-1,1 = hiWj,u + giVj,u
    Vj-1,m = hkWj,u + gkVj,u
    Si L > 2 entonces, para n = 1, ...,  $\frac{L}{2} - 1$ , hacer
        u = u + 1
        Si u ≥ M' entonces u = 0
        i = i + 2
        k = k + 2
        Vj-1,1 = Vj-1,1 + hiWj,u + giVj,u
        Vj-1,m = Vj-1,m + hkWj,u + gkVj,u

```

Utilizando el algoritmo anterior, si empezamos con \mathbf{W}_J y \mathbf{V}_J obtenemos \mathbf{V}_{J-1} que lo representamos por

$$\mathbf{V}_J \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_{J-1}}} \longrightarrow \mathbf{V}_{J-1}$$

↑
 \mathbf{W}_J

Aplicando de nuevo el algoritmo con \mathbf{W}_{J-1} y \mathbf{V}_{J-1} se obtiene \mathbf{V}_{J-2}

$$\mathbf{V}_J \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_{J-1}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_{J-2}}} \longrightarrow \mathbf{V}_{J-2}$$

↑ ↑
 \mathbf{W}_J \mathbf{W}_{J-1}

Si seguimos aplicando el algoritmo $J-2$ iteraciones más obtenemos $\mathbf{V}_0 = \mathbf{X}$, observándose que se obtienen $\mathbf{V}_{J-2}, \dots, \mathbf{V}_1$ como cálculos intermedios

$$\mathbf{V}_J \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_{J-1}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_{J-2}}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}_1}} \longrightarrow \mathbf{V}_0 = \mathbf{X}$$

↑ ↑ ↑
 \mathbf{W}_J \mathbf{W}_{J-1} \mathbf{W}_1

El detalle de orden j , \mathcal{D}_j , se obtiene tomando la inversa DWT de los vectores $\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{j-1}, \mathbf{W}_j, \mathbf{0}_j$ donde $\mathbf{0}_k$ i representa un vector de $\frac{N}{2^k}$ ceros para $k = 1, \dots, j$. Podemos esquematizarlo de la forma

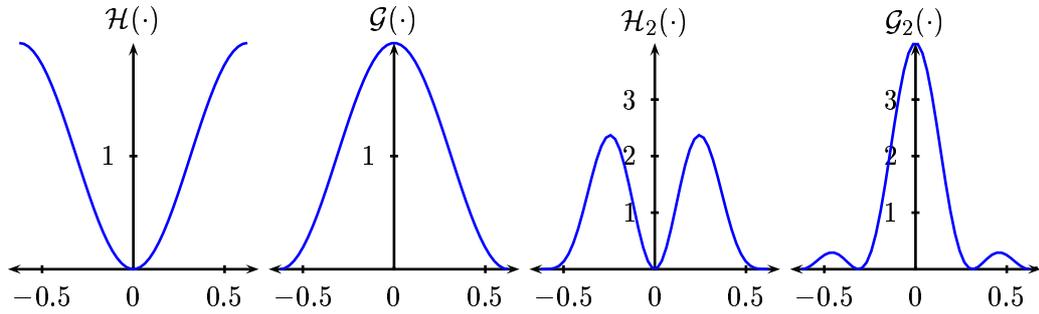
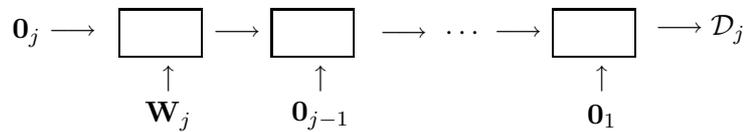
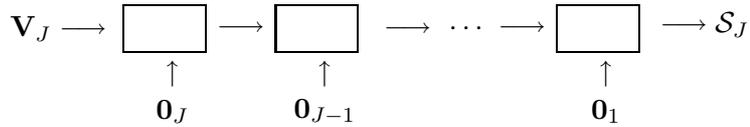


Figura 3.11: Ganancia al cuadrado de las funciones de transferencia de niveles 1 y 2 de los filtros wavelet y de escala de Haar.



Análogamente puede obtenerse la componente suave \mathcal{S}_J aplicando la inversa DWT a los vectores $\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_J, \mathbf{V}_J$, esto es



Observación 3.4.5. Ya se ha mencionado que, en la práctica, el filtro $\{g_l\}$ es un filtro paso bajo de media banda con ancho de banda nominal $0 \leq |f| \leq \frac{1}{4}$, y a su vez el filtro $\{h_l\}$ es un filtro paso alto de media banda con ancho de banda nominal $\frac{1}{4} \leq |f| \leq \frac{1}{2}$. Se tiene que el filtro $\{g_{2,l}\}$ es un filtro de paso bajo a cuarto de banda cuyo ancho de banda es $0 \leq |f| \leq \frac{1}{8}$ mientras que $\{h_{2,l}\}$ es de paso alto a cuarto de banda con un paso de banda $\frac{1}{8} \leq |f| \leq \frac{1}{4}$. Continuando de esta forma se obtiene que $\{g_{j,l}\}$ es un filtro de paso bajo con ancho de banda $0 \leq |f| \leq \frac{1}{2^{j+1}}$ y análogamente $\{h_{j,l}\}$, de paso alto con ancho de banda $\frac{1}{2^{j+1}} \leq |f| \leq \frac{1}{2^j}$.

Para ilustrarlo se muestran las gráficas de las ganancias al cuadrado de los filtros wavelet y de escala de Haar para los niveles 1 y 2 (dadas por $\mathcal{H}(\cdot)$, $\mathcal{G}(\cdot)$, $\mathcal{H}_2(\cdot)$ y $\mathcal{G}_2(\cdot)$) en la figura 3.11 donde los filtros son

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & g_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ h_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & g_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Destacar que hay dos caminos para deducir los filtros wavelet y de escala de nivel superior dados por $\{h_{j,l}\}$ y $\{g_{j,l}\}$ que se deducen de las ecuaciones (3.57) y (3.62).

$\{h_l\} \longleftrightarrow H(\cdot)$	$\{g_l\} \longleftrightarrow G(\cdot)$
$h_l = (-1)^l g_{L-1-l}$	$g_l = (-1)^{l+1} h_{L-1-l}$
$H(f) = -e^{-i2\pi f(L-1)} G(\frac{1}{2} - f)$	$G(f) = e^{-i2\pi f(L-1)} H(\frac{1}{2} - f)$
$\sum_l h_l = H(0) = 0$	$\sum_l g_l = G(0) = \sqrt{2}$
$\sum_l h_l^2 = 1$	$\sum_l g_l^2 = 1$
$\sum_l h_l h_{l+2n} = 0, n \neq 0$	$\sum_l g_l g_{l+2n} = 0, n \neq 0$
$\sum_l g_l h_{l+2n} = 0$	
$\mathcal{H}(f) = H(f) ^2$	$\mathcal{G}(f) = G(f) ^2$
$\mathcal{H}(f) + \mathcal{H}(f + \frac{1}{2}) = 2$	$\mathcal{G}(f) + \mathcal{G}(f + \frac{1}{2}) = 2$
$\mathcal{H}(f) + \mathcal{G}(f) = 2$	
$W_{1,t} = \sum_l h_l X_{2t+1-l} \pmod N$	$V_{1,t} = \sum_l g_l X_{2t+1-l} \pmod N$
$W_{j,t} = \sum_l h_l V_{j-1,2t+1-l} \pmod{N_{j-1}}$	$V_{j,t} = \sum_l g_l V_{j-1,2t+1-l} \pmod{N_{j-1}}$
$h_{1,l} = h_l, H_1(f) = H(f)$	$g_{1,l} = g_l, G_1(f) = G(f)$
$H_j(f) = H(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} G(2^l f)$	$G_j(f) = \prod_{l=0}^{j-2} G(2^l f)$
$H_j(f) = H(2^{j-1}f) G_{j-1}(f)$	$G_j(f) = G(2^{j-1}f) G_{j-1}(f)$
$\{h_{j,l}\} \longleftrightarrow H_j(\cdot)$	$\{g_{j,l}\} \longleftrightarrow G_j(\cdot)$
$h_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} h_k g_{j-1,l-2^{j-1}k}$	$g_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} g_k g_{j-1,l-2^{j-1}k}$
$h_{j,l} = \sum_{k=0}^{L_{j-1}-1} g_{l-2k} h_{j-1,k}$	$g_{j,l} = \sum_{k=0}^{L_{j-1}-1} g_{l-2k} g_{j-1,k}$
$\sum_l h_{j,l} = H_j(0) = 0$	$\sum_l g_{j,l} = G_j(0) = \sqrt{2^j}$
$\sum_l h_{j,l}^2 = 1$	$\sum_l g_{j,l}^2 = 1$
$\sum_l h_{j,l} h_{j,l+2^j n} = 0, n \neq 0$	$\sum_l g_{j,l} g_{j,l+2^j n} = 0, n \neq 0$
$\sum_l g_{j,l} h_{j,l+2^j n} = 0$	
$\mathcal{H}_j(f) = H_j(f) ^2$	$\mathcal{G}_j(f) = G_j(f) ^2$
$W_{j,t} = \sum_l h_{j,l} X_{2^j(t+1)-1-l} \pmod N$	$V_{j,t} = \sum_l g_{j,l} X_{2^j(t+1)-1-l} \pmod N$

Cuadro 3.6: Relaciones fundamentales acerca de los filtros wavelet y de escala. Como $h_l = g_l = 0$ para $l < 0$ y $l \geq L$, los sumatorios que involucren a h_l o a g_l pueden tener sus rangos desde $l = 0$ hasta $l = L - 1$ o sobre todos los enteros. Análogamente, sumatorios involucrando a $h_{j,l}$ o a $g_{j,l}$ pueden tener rangos desde $l = 0$ hasta $l = L_j - 1$ o sobre todos los enteros. Recordemos que $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ y que $N_j = \frac{N}{2^j}$.

El primero consiste en insertar entre cada dos elementos de $\{h_l\}$ y $\{g_l\}$ respectivamente, $2^{j-1} - 1$ ceros y filtrando seguidamente con $\{g_{j-1,l}\}$ obteniéndose que

$$h_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} h_k g_{j-1,l-2^{j-1}k} \quad , \quad g_{j,l} = \sum_{k=0}^{L-1} g_k g_{j-1,l-2^{j-1}k}.$$

El segundo consiste, respectivamente, en insertar un cero entre cada dos elementos de los filtros wavelet y de escala de nivel anterior dados por $\{h_{j-1,l}\}$ y $\{g_{j-1,l}\}$ y filtrar seguidamente con el filtro $\{g_l\}$, esto es,

$$h_{j,l} = \sum_{k=0}^{L_{j-1}-1} g_{l-2k} h_{j-1,k} \quad , \quad g_{j,l} = \sum_{k=0}^{L_{j-1}-1} g_{l-2k} g_{j-1,k}.$$

En el cuadro (3.6) se recoge un sumario de los conceptos clave abordados hasta el momento respecto a la DFT.

3.5. Transformada discreta wavelet parcial.

Dada una serie $\{X_t : t = 0, \dots, N-1\}$ con $N = 2^J$, el algoritmo piramidal proporciona los coeficientes DWT $\mathbf{W} = \mathcal{W}\mathbf{X}$ tras J repeticiones. Si paramos el algoritmo tras $J_0 < J$ repeticiones obtenemos la **DWT parcial** de nivel J_0 de \mathbf{X} cuyos coeficientes son

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{J_0} \\ \mathbf{V}_{J_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_0 \\ \vdots \\ \mathcal{W}_{J_0} \\ \mathcal{V}_{J_0} \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \mathcal{A}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{B}_{J_0} \mathcal{A}_{J_0-1} \cdots \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_{J_0} \mathcal{A}_{J_0-1} \cdots \mathcal{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

donde el vector \mathbf{V}_{J_0} de $\frac{N}{2^{J_0}}$ coeficientes de escala sustituye a los $\frac{N}{2^{J_0}}$ de \mathbf{W} y representa la media sobre escala $\lambda_{J_0} = 2^{J_0}$ capturando las componentes de bajas frecuencias (escalas grandes) de \mathbf{X} .

En la práctica se usa más la DWT parcial que la completa debido a la flexibilidad que proporciona el hecho de fijar la escala a partir de la cual el análisis no es de interés práctico. Además, con la DWT parcial de nivel J_0 , se relaja la condición de que $N = 2^J$ a que N sea múltiplo de 2^{J_0} .

El análisis multirresolución (MRA) resulta

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{J_0} \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_{J_0}$$

con idénticas consideraciones que en el caso de la DWT completa mientras que la descomposición de energía es

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathbf{W}_j\|^2 + \|\mathbf{V}_{J_0}\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathcal{D}_j\|^2 + \|\mathcal{S}_{J_0}\|^2$$

y la de la varianza, conocido también por ANOVA,

$$\widehat{\sigma}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} = \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathbf{W}_j\|^2 + \frac{1}{N} \|\mathbf{V}_{J_0}\|^2 - \overline{\mathbf{X}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{J_0} \|\mathcal{D}_j\|^2 + \frac{1}{N} \|\mathcal{S}_{J_0}\|^2 - \overline{\mathbf{X}}^2 \quad (3.66)$$

donde los dos últimos términos corresponden a la varianza de la componente suave de nivel J_0 dada por \mathcal{S}_{J_0} .

3.6. Wavelet de Daubechies.

Hemos visto que podemos construir una transformada DWT ortonormal dada por la matriz \mathcal{W} basándonos en las propiedades (3.13a), (3.13b) y (3.13c).

En la figura 3.11 se observa que para la wavelet de Haar, dicho filtro es un filtro de paso alto con ancho de banda nominal de $f \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$, pero es importante percibir que esta interpretación no se deduce de las propiedades mencionadas como ilustra el siguiente filtro

$$a_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

cuya ganancia cuadrática no es una aproximación a un filtro de paso alto (ver figura 3.12)

$$\mathcal{H}(f) = 1 - \cos(8\pi f).$$

Daubechies, imponiendo un conjunto de condiciones de regularidad, propuso una clase de wavelets muy útil de acuerdo a la noción de diferencia de medias adyacentes. La definición viene en términos de la función ganancia cuadrática del filtro escala $\{g_l : l = 0, \dots, L-1\}$ dada por

$$\mathcal{G}^{(D)}(f) = 2 \cos^L \pi f \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \sin^{2l} \pi f,$$

donde L es un entero positivo par y

$$\sin^0(\pi f) = 1$$

Usando la relación

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) = \mathcal{G}^{(D)}(f + \frac{1}{2})$$

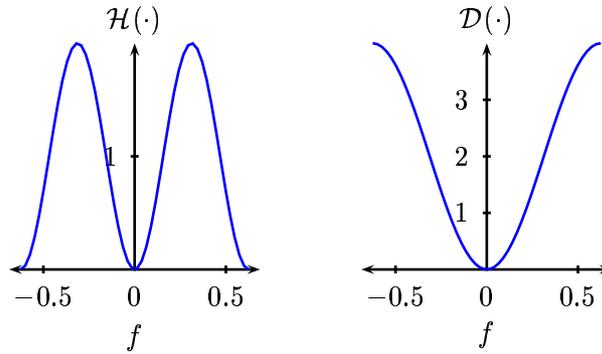


Figura 3.12: Ganancia al cuadrado de la función de transferencia del filtro dado por $a_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ (izquierda) y del filtro diferencia dado por $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ (derecha).

se obtiene que

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) = 2 \sin^L \pi f \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \cos^{2l} \pi f.$$

Considerando que la ganancia cuadrática del filtro diferencia $\{a_0 = 1, a_1 = -1\}$ viene dada por (ver figura 3.12)

$$\mathcal{D}(f) = 4 \sin^2(\pi f),$$

podemos escribir

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) = \mathcal{D}^{\frac{L}{2}}(f) \mathcal{A}_L(f)$$

donde

$$\mathcal{A}_L(f) = \frac{1}{2^{L-1}} \sum_{l=0}^{\frac{L}{2}-1} \binom{\frac{L}{2}-1+l}{l} \cos^{2l}(\pi f).$$

Análogamente se prueba (por inducción sobre L) que

$$\mathcal{H}^{(D)}(f) + \mathcal{H}^{(D)}\left(f + \frac{1}{2}\right) = 2$$

para todo natural L . Además cualquier filtro wavelet $\{h_l\}$ cuya ganancia cuadrática satisfaga la relación anterior tiene energía unidad y es ortogonal a las traslaciones pares.

A medida que L crece, $\mathcal{H}^{(D)}(\cdot)$ converge a un filtro ideal de paso alto mientras que $\mathcal{G}^{(D)}$, a un filtro ideal de paso bajo; por otra parte el número de secuencias reales que tiene ganancia cuadrática $\mathcal{G}^{(D)}(\cdot)$ también crece siendo la única diferencia entre la función transferencia de ellas, la función fase, es decir, $\theta^{(G)}(\cdot)$ de la representación polar

$$G(f) = \sqrt{\mathcal{G}^{(D)}(f)} e^{i\theta^{(G)}(f)}.$$

Dada $\mathcal{G}^{(D)}(\cdot)$, se pueden obtener todas las $\{g_l\}$ por un procedimiento conocido por factorización espectral donde diferentes factorizaciones conducen a diferentes funciones fase. El problema consiste en determinar la factorización adecuada para utilizar.

La factorización que utilizó Daubechies originalmente corresponde a la elección de fase extremal para la función de transferencia y conduce a lo que se conoce como **filtro de mínimo retardo** en la literatura de ingeniería, esto es, si $\{g_l^{(fe)}\}$ es el filtro escala de fase extremal y $\{g_l\}$ es otro filtro escala correspondiente a otra factorización, se tiene que

$$\sum_{l=0}^m g_l^2 \leq \sum_{l=0}^m \left(g_l^{(fe)}\right)^2, \quad m = 0, \dots, L-1$$

cumpléndose con igualdad para $m = L-1$ pues ambos filtros tienen energía unidad; sin embargo para $m < L-1$, la suma anterior se conoce como **energía parcial** de la secuencia y en el caso del filtro de mínimo retardo crece tan rápido como es posible. En adelante, nos referiremos al filtro de Daubechies de fase extremal de anchura L mediante $D(L)$ para $L = 2, 4, \dots$, teniéndose que $D(2)$ coincide con el filtro de escala de Haar.

Una segunda elección para la factorización de $\mathcal{G}^{(D)}(\cdot)$ conduce a la familia de filtros escala de **asimetría mínima** que denotaremos por $\{g_l^{(am)}\}$ y que precisa los conceptos de fase cero y fase lineal para explicar la naturaleza de tal factorización.

Cosideremos un filtro $\{u_l\}$ cuya función de transferencia sea

$$U(f) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} u_l e^{-i2\pi fl}$$

y supongamos que $\{u_l^o\}$ sea su filtro periodizado de longitud N con DFT $\{U_k^o\}$

$$U_k^o = \sum_{l=0}^{N-1} u_l^o e^{-i2\pi l \frac{k}{N}} = U(f_k), \quad f_k = \frac{k}{N}.$$

Consideremos además una serie temporal $\{X_t : t = 0, \dots, N-1\}$ con DFT

$$\mathcal{X}_k = \sum_{t=0}^{N-1} X_t e^{-i2\pi t \frac{k}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1$$

cuya relación inversa viene dada por

$$X_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_k e^{i2\pi k \frac{t}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Sea

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N-1} u_k^o X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

el resultado de filtrar circularmente $\{X_t\}$ con $\{u_l^o\}$. Entonces la DFT de $\{Y_t\}$ viene dada por $\{U_k^o \mathcal{X}_k\}$ por lo que

$$Y_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} U_k^o \mathcal{X}_k e^{i2\pi k \frac{t}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1.$$

Reescribimos la función de transferencia $U(\cdot)$ en su forma polar $U(f) = |U(f)|e^{i\theta(f)}$ donde $\theta(\cdot)$ es la función fase. Si

$$\theta(f_k) = 0, \quad \forall k \quad (3.67)$$

se tiene que $U(f) = |U(f)|$ y de aquí, $U_k^o = |U_k^o|$ por lo que

$$Y_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |U_k^o| \mathcal{X}_k e^{i2\pi k \frac{t}{N}}, \quad t = 0, \dots, N-1,$$

y consiguientemente, filtrando la serie $\{X_t\}$ con $\{u_l^o\}$ se obtiene una serie cuya síntesis difiere de la de $\{X_t\}$ sólo en las amplitudes de las sinusoides y no en la fase. La interpretación práctica de la condición (3.67) es que los sucesos en $\{Y_t\}$ pueden ser alineados a los de $\{X_t\}$, que resulta un hecho importante a la hora de la interpretación del significado de $\{Y_t\}$ en aplicaciones físicas.

Un filtro con la función fase satisfaciendo

$$\theta(f) = 0$$

para todas las frecuencias, se denomina **filtro de fase cero**.

Ejemplo 3.6.1. Los filtros dados por

$$u_{1,l} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l = 0 \\ \frac{1}{4}, & l = \pm 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases} \quad u_{2,l} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l = 0, 1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

son dos ejemplos de filtros con fase cero ($u_{1,l}$) y con fase distinta de cero ($u_{2,l}$). Sus funciones de transferencia son

$$U_1(f) = \cos^2 \pi f, \quad U_2(f) = e^{-i\pi f} \cos^2 \pi f$$

y satisfacen que

$$U_1(f) = |U_1(f)|, \quad U_2(f) = e^{-i\pi f} |U_2(f)|.$$

Para introducir los filtros de fase lineal, consideremos el efecto de trasladar circularmente en ν unidades la salida del filtro dada por $\{Y_t\}$ para construir

$$Y_t^{(\nu)} = Y_{t+\nu \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N-1$$

donde ν es un entero satisfaciendo que $1 \leq |\nu| \leq N-1$. Así

$$Y_t^{(\nu)} = \sum_{l=0}^{N-1} u_l^o X_{t+\nu-l \bmod N} = \sum_{l=-\nu}^{N-1-\nu} u_{l+\nu}^o X_{t-l \bmod N} = \sum_{l=0}^{N-1} u_{l+\nu \bmod N}^o X_{t-l \bmod N}$$

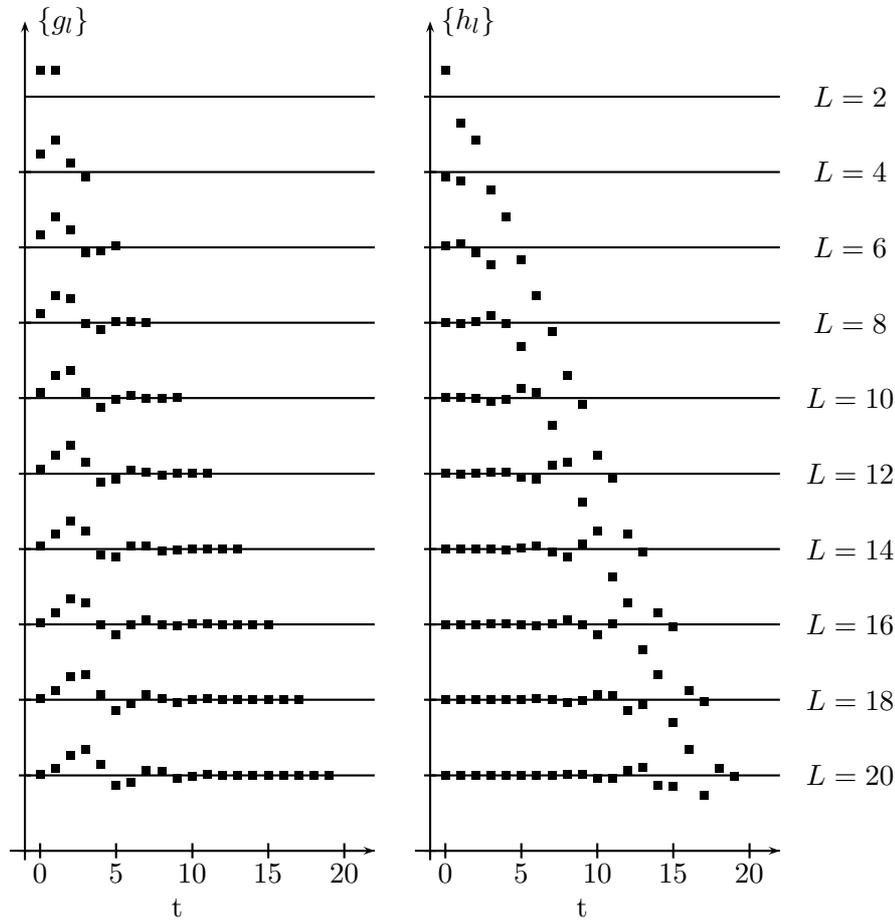


Figura 3.13: Filtros escala y wavelet de $D(L)$ (de izquierda a derecha) para diferentes valores de L .

de lo que se infiere que trasladar circularmente la salida del filtro en ν unidades corresponde a utilizar un filtro cuyos coeficientes hayan sido trasladados circularmente en ν unidades.

Por otra parte el filtro circular $\{u_{l+\nu \bmod N}^o : l = 0, \dots, N-1\}$ puede ser construido periodizando el filtro $\{u_l^{(\nu)} = u_{l+\nu} : l = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ a longitud N por lo que las propiedades de fase de $\{u_{l+\nu \bmod N}^o\}$ pueden obtenerse de la función de transferencia de $\{u_l^{(\nu)}\}$ que resulta

$$U^{(\nu)}(f) = e^{i2\pi f\nu} U(f).$$

Por consiguiente si $\{u_l\}$ tiene fase cero ($U(f) = |U(f)|$) entonces

$$U^{(\nu)}(f) = e^{i2\pi f\nu} |U(f)|$$

y por tanto $\{u_l^{(\nu)}\}$ tiene una fase dada por

$$\theta(f) = 2\pi f\nu.$$

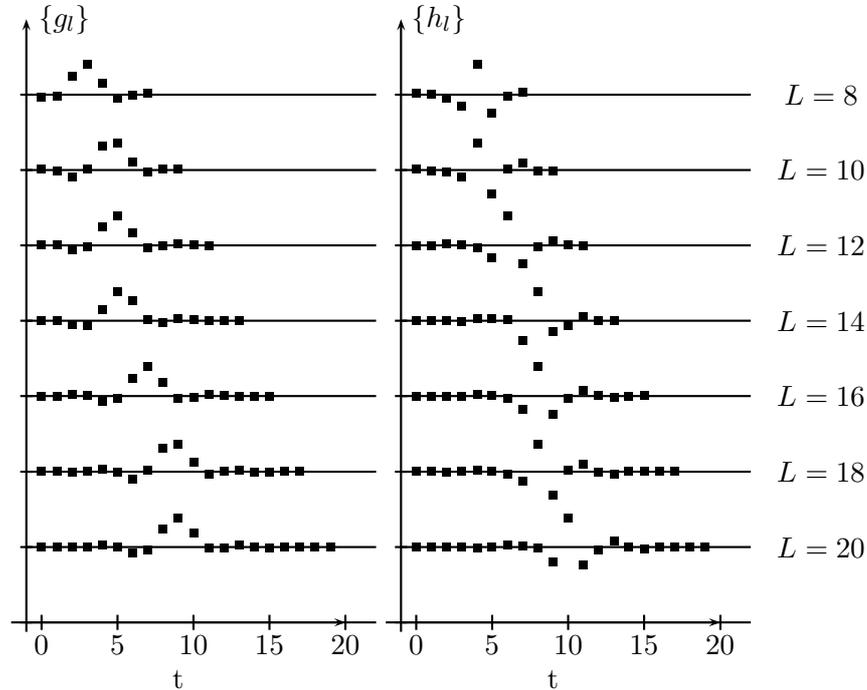


Figura 3.14: Filtros escala y wavelet de $LA(L)$ (de izquierda a derecha) para diferentes valores de L .

Un filtro con función fase satisfaciendo la propiedad anterior para cierta $\nu \in \mathbb{R}$ se denomina *filtro de fase lineal*.

Observación 3.6.1. Nótese que un filtro de fase lineal para cierta $\nu \in \mathbb{Z}$ puede convertirse en un filtro de fase cero sin más que trasladarlo en ν unidades, donde el signo positivo de ν se traduce en traslación a la derecha y el negativo, a la izquierda.

Ejemplo 3.6.2. El filtro dado por

$$u_{3,l} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & l = 1 \\ \frac{1}{4}, & l = 0, 2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

es un ejemplo de filtro con fase lineal para $\nu = -1$. Su función de transferencia es

$$U_3(f) = e^{-i2\pi f} \cos^2 \pi f$$

y si lo trasladamos a la izquierda una unidad obtenemos que $u_{3,l}^{(-1)} = u_{1,l}$ cuya fase es cero.

Ya estamos en condiciones de establecer la definición de filtro escala de Daubechies de asimetría mínima. De todas las secuencias $\{g_l : l = 0, \dots, L-1\}$ con ganancia cuadrática

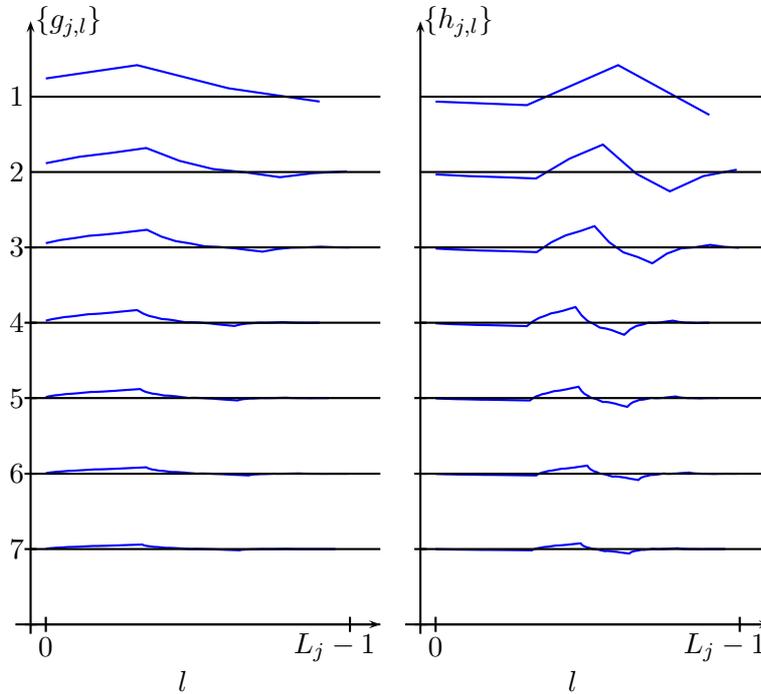


Figura 3.15: Filtros escala y wavelet de $D(4)$ de orden superior, $j = 1, \dots, 7$.

$\mathcal{G}^{(D)}(f)$ calculamos

$$\rho_{\bar{\nu}}(\{g_l\}) = \max_{|f| \leq \frac{1}{2}} |\theta^{(G)}(f) - 2\pi f \bar{\nu}|$$

y consideramos ν el valor que minimiza dicha cantidad. El filtro buscado $\{g_l^{(am)}\}$ viene dado por la secuencia que minimiza la cantidad anterior para dicho valor ν que satisface que

$$\theta^{(G)}(f) \approx 2\pi f \nu$$

Como $H(f) = e^{-i2\pi f(L-1) + \pi i G(\frac{1}{2} - f)}$ se sigue

$$\theta^{(H)}(f) = -2\pi f(L-1) + \pi + \theta^{(G)}(\frac{1}{2} - f)$$

y aplicando la ecuación anterior

$$\theta^{(H)}(f) = -2\pi f(L-1) + \pi + 2\pi(\frac{1}{2} - f)\nu = -2\pi f(L-1 + \nu) + \pi(\nu + 1)$$

con lo que la función fase del filtro wavelet es aproximadamente lineal cuando ν es impar pues se define módulo 2π .

A este tipo de filtro lo denotaremos mediante $LA(L)$ con $L = 8, 10, \dots$. Conviene anotar que en la tabla 6.3 de [4] vienen los valores de los diferentes $LA(L)$ pero que no coinciden con los que se usan aquí debido a que la normalización que allí se usa es $\sum_{l=0}^{L-1} g_l = 2$ en lugar de $\sum_{l=0}^{L-1} g_l = \sqrt{2}$. En lo restante, coinciden.

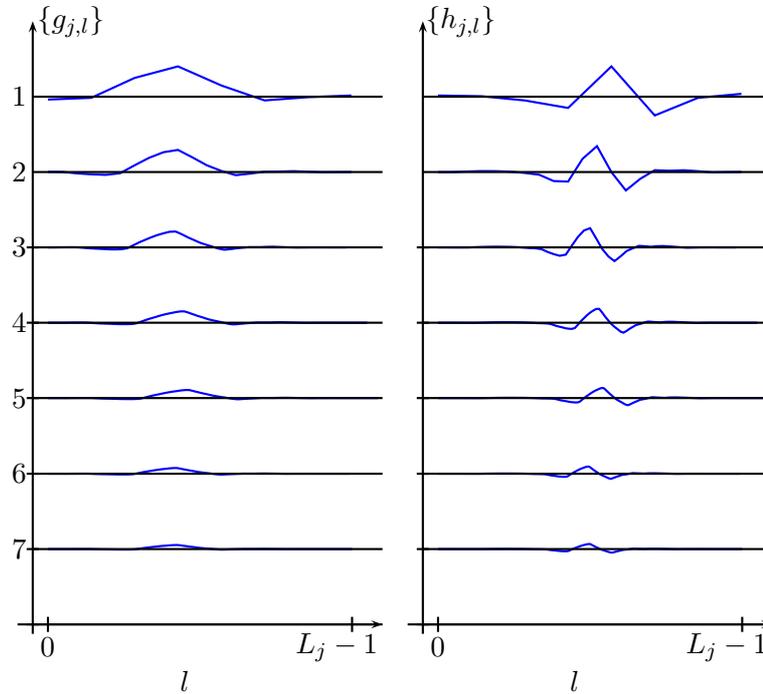


Figura 3.16: Filtros escala y wavelet de $LA(8)$ de orden superior, $j = 1, \dots, 7$.

3.7. Wavelet de Coiflet.

Los filtros wavelet de Daubechies no son los únicos que proporcionan una DWT que pueda ser descrita en términos de diferencias generalizadas de medias adyacentes. Un segundo ejemplo de este tipo de filtros son los denominados filtros de Coiflet. Aunque hemos definido los filtros wavelet de Daubechies a través de su ganancia cuadrática, pueden obtenerse mediante cierta condición relativa a la anulación de momentos sobre la función wavelet que queda determinada por el filtro escala asociado, idea que subyace también detrás de la definición de los filtros de Coiflet. Esta construcción proporciona una familia de wavelets con buenas propiedades de la función fase. Nos referiremos a ellos mediante $C(L)$. La ganancia cuadrática asociada al filtro wavelet $\{h_l^{(c)}\}$ viene dada por

$$H^{(c)}(f) = \mathcal{D}^{\frac{L}{3}}(f) \left(\sum_{l=0}^{\frac{L}{6}-1} \binom{\frac{L}{6}-1+l}{l} \cos^{2l} \pi f + \cos^{\frac{L}{3}} \pi f F(f) \right)^2$$

donde $F(\cdot)$ es un polinomio trigonométrico elegido para que se satisfaga la ecuación

$$\mathcal{H}^{(c)}(f) + \mathcal{H}^{(c)}\left(f + \frac{1}{2}\right) = 2, \quad \forall f$$

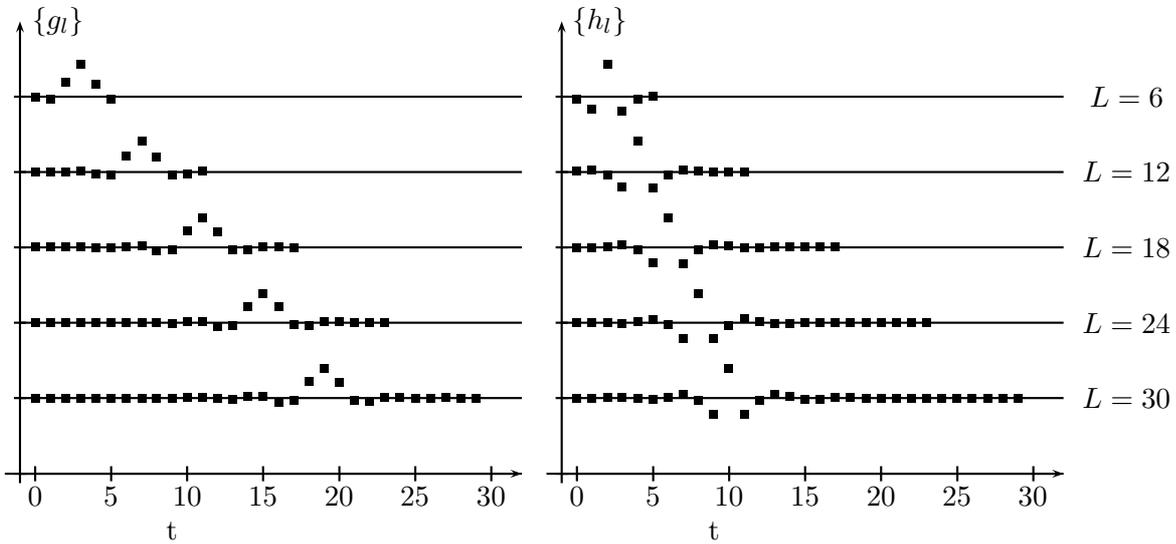


Figura 3.17: Filtros escala y wavelet de $C(L)$ (de izquierda a derecha) para diferentes valores de L .

Obsérvese que mientras que los filtros wavelet de Daubechies de anchura L tienen $\frac{L}{2}$ operaciones de diferencia, los de Coiflet involucran $\frac{L}{3}$ de tales operaciones. La función fase para $\{g_l^{(c)}\}$ es aproximadamente $2\pi f\nu$ para $\nu = -\frac{2L}{3} + 1$.

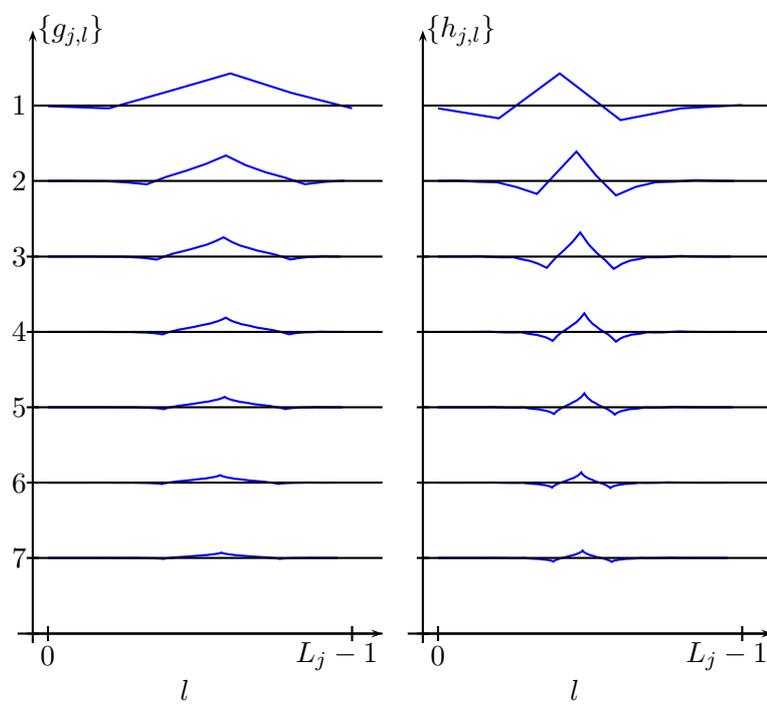


Figura 3.18: Filtros escala y wavelet de $C(6)$ de orden superior, $j = 1, \dots, 7$.

Capítulo 4

Ejemplos.

En los ejemplos que se proporcionan en esta sección trataremos de ilustrar cómo se comporta el análisis MRA con la transformada DWT en los diferentes comportamientos teóricos elementales, además de analizar dos casos de estudio real. Se utilizará como norma general la DWT de $LA(8)$ salvo mención expresa. En los ejemplos introductorios el análisis se realizará parcial con $J_0 = 4$ niveles, mientras que en los casos de estudio con $J_0 = 6$. Se muestran además el análisis de Fourier y el periodograma con fines de comparación.

4.1. Ejemplos ilustrativos.

En cada ejemplo se dibujarán dos gráficas: una con las transformadas wavelet y de Fourier que llamaremos \mathbf{W} y \mathbf{F} respectivamente además de sus periodogramas asociados (tanto el wavelet como el de Fourier se llamarán \mathbf{P}), que distinguiremos porque cada periodograma se encuentra encima del análisis del que proviene y la otra contendrá los detalles y aproximaciones (denotados por \mathcal{D}_j y \mathcal{S}_j) del análisis MRA wavelet.

Destacar que en todos los ejemplos introductorios se sigue esta estructura, salvo en el correspondiente al ruido uniforme y normal donde no es de tanto interés una visión detallada del análisis MRA como la visión global del tratamiento que hace la transformada DWT con ellos.

4.1.1. Suma de tres frecuencias puras.

El objeto de este ejemplo es mostrar cómo el análisis wavelet sirve como herramienta para la detección de las frecuencias puras de una serie. Proporcionaremos el análisis de Fourier para una comparativa con el wavelet y mostraremos los periodogramas asociados a dichos análisis.

La señal se compone de una suma de tres senos con frecuencia baja (período de 200 min), media (período de 20 min) y alta (período de 2 min), es decir,

$$s(t) = \sin(3t) + \sin(0.3t) + \sin(0.03t)$$

tomada a un intervalo de muestreo $\Delta t = 1$ min a lo largo de un total de $N = 1024$ observaciones.

Analizaremos con la DWT parcial de orden $J_0 = 5$ de $LA(8)$. Recordemos que los detalles de orden j proporcionan el análisis en la escala de $\lambda_j = 2^j$ a $\lambda_{j+1} = 2^{j+1}$ por lo que la sinusoidal de período 2 se manifestará en \mathcal{D}_2 (escala de 2 a 4); la de período 20, en \mathcal{D}_4 (escala de 16 a 32) y la de 200, en \mathcal{A}_4 (escala superior a 32) que desaparecería a partir de \mathcal{D}_8 (escalas superiores a 256) hechos que pueden observarse, salvo el último, en la figura 4.2.

Obsérvese que las tres frecuencias son identificadas en el periodograma del análisis de Fourier. De manera similar, el periodograma del análisis wavelet muestra un pico en cada uno de los rangos en los que se encuentra las frecuencias dentro del alcance del análisis. En $j = 1$, escalas de 2 a 4; en $j = 4$, escala de 16 a 32. Como el análisis se hizo con $J_0 = 5$

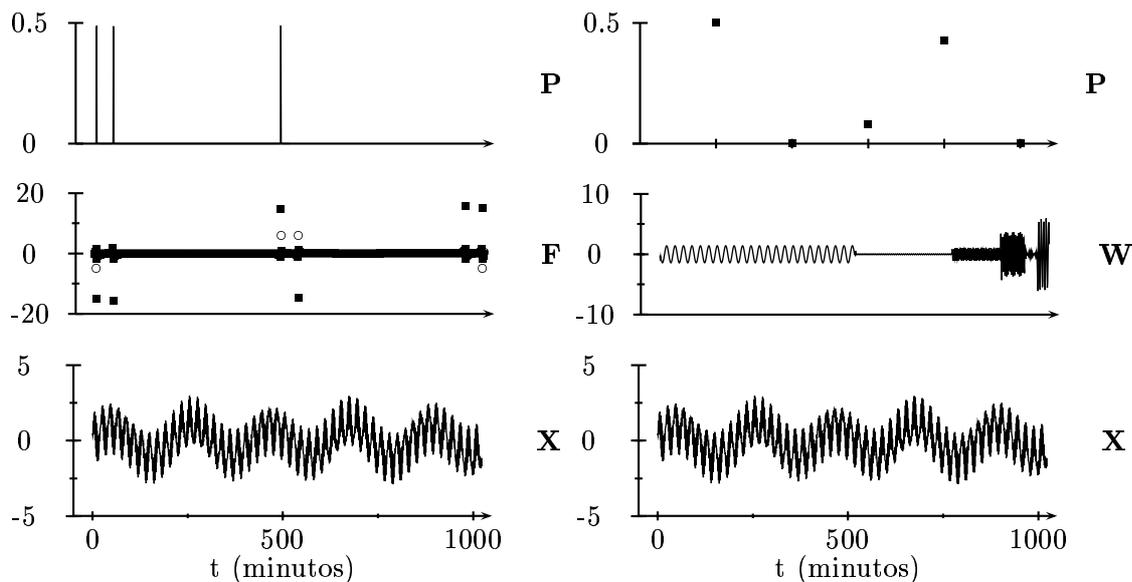


Figura 4.1: Serie, transformadas DWT de $LA(8)$, transformada de Fourier y periodograma. La Serie, en este caso, es una suma de tres frecuencias puras.

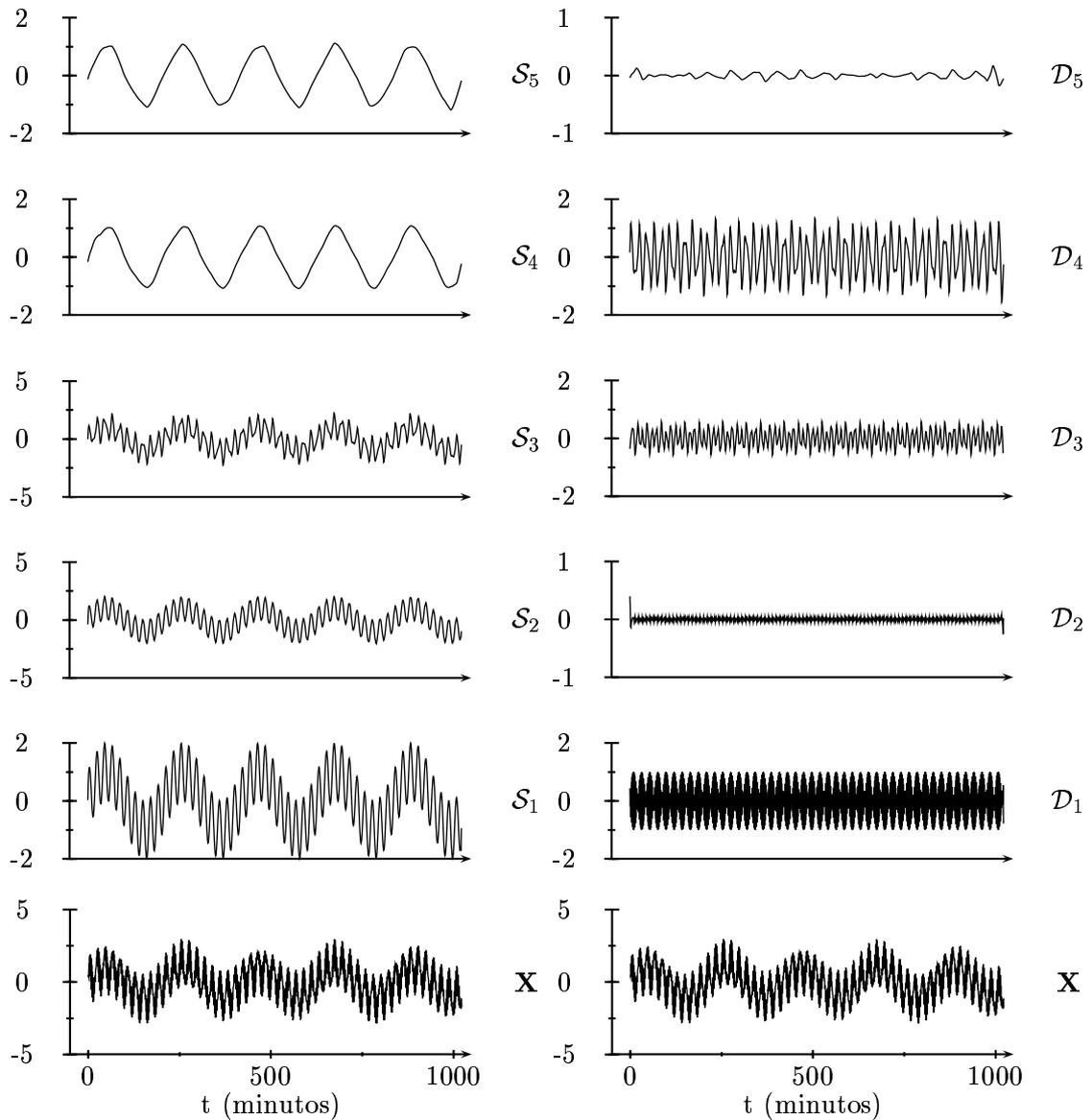


Figura 4.2: Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la primera (segunda) columna. La Serie, en este caso, es una suma de tres frecuencias puras.

la frecuencia más baja que capta es la de periodo 64 y no captamos la componente de periodo 200; si hubieramos hecho un análisis a $J_0 = 7$ etapas alcanzaríamos una escala de 256 y saldría el pico que falta en el periodograma wavelet.

4.1.2. Cambio brusco en la frecuencia.

El objetivo de este ejemplo es ilustrar el uso de la DWT para la detección de cambios bruscos en la frecuencia de las componentes de la serie. El análisis de Fourier detecta ambas frecuencias en el periodograma pero la discontinuidad entre ellas pasa desapercibida.

La señal se compone de dos senos: uno de frecuencia baja (periodo de 200 min) y otro de frecuencia alta (periodo de 2 min), una a cada lado de $t = 512$, es decir,

$$s(t) = \begin{cases} \sin(0.03t), & 1 \leq t \leq 512 \\ \sin(3t), & 512 < t \leq 1024 \end{cases}$$

con un intervalo de muestreo de $\Delta t = 1$ min en un total de $N = 1024$ observaciones. Ambas componentes no conectan de forma continua, hecho observable en la figura 4.4 en los valores altos de los detalles en torno a $t = 512$ (conviene apuntar que la detección de discontinuidades se muestra en ejemplos siguientes), análisis realizado con la wavelet parcial de $J_0 = 4$ de $LA(8)$.

Por otra parte, la componente de frecuencia alta se manifiesta en \mathcal{D}_1 (escala de 2 a 4) mientras que la de frecuencia baja en \mathcal{A}_4 (escala superior a 16).

Si hicieramos un análisis multirresolución a la señal en $J_0 = 6$ etapas observaríamos que en la aproximación de orden 6 todavía estaría presente la componente de baja frecuencia (escala de 16 a 32).

En este caso concreto, con este número de etapas, el periodograma de la FFT de la señal identifica con más claridad cada una de las componentes periódicas que el periodograma

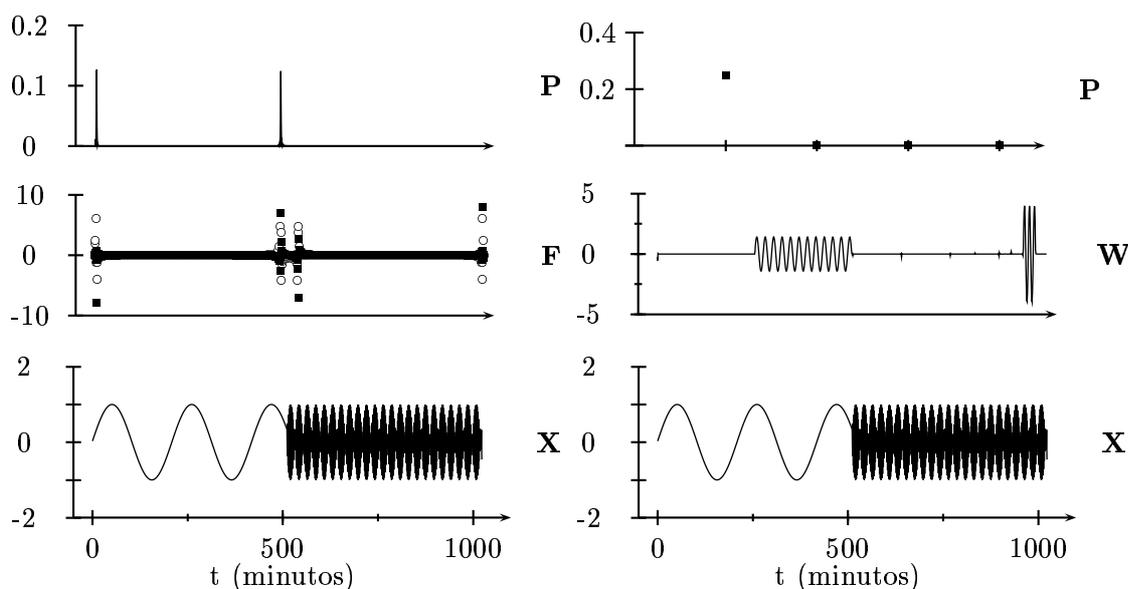


Figura 4.3: Serie, transformadas DWT de $LA(8)$ y periodograma, transformada de Fourier y periodograma. La Serie, en este caso, es una sinusoidal con un cambio brusco de frecuencia.

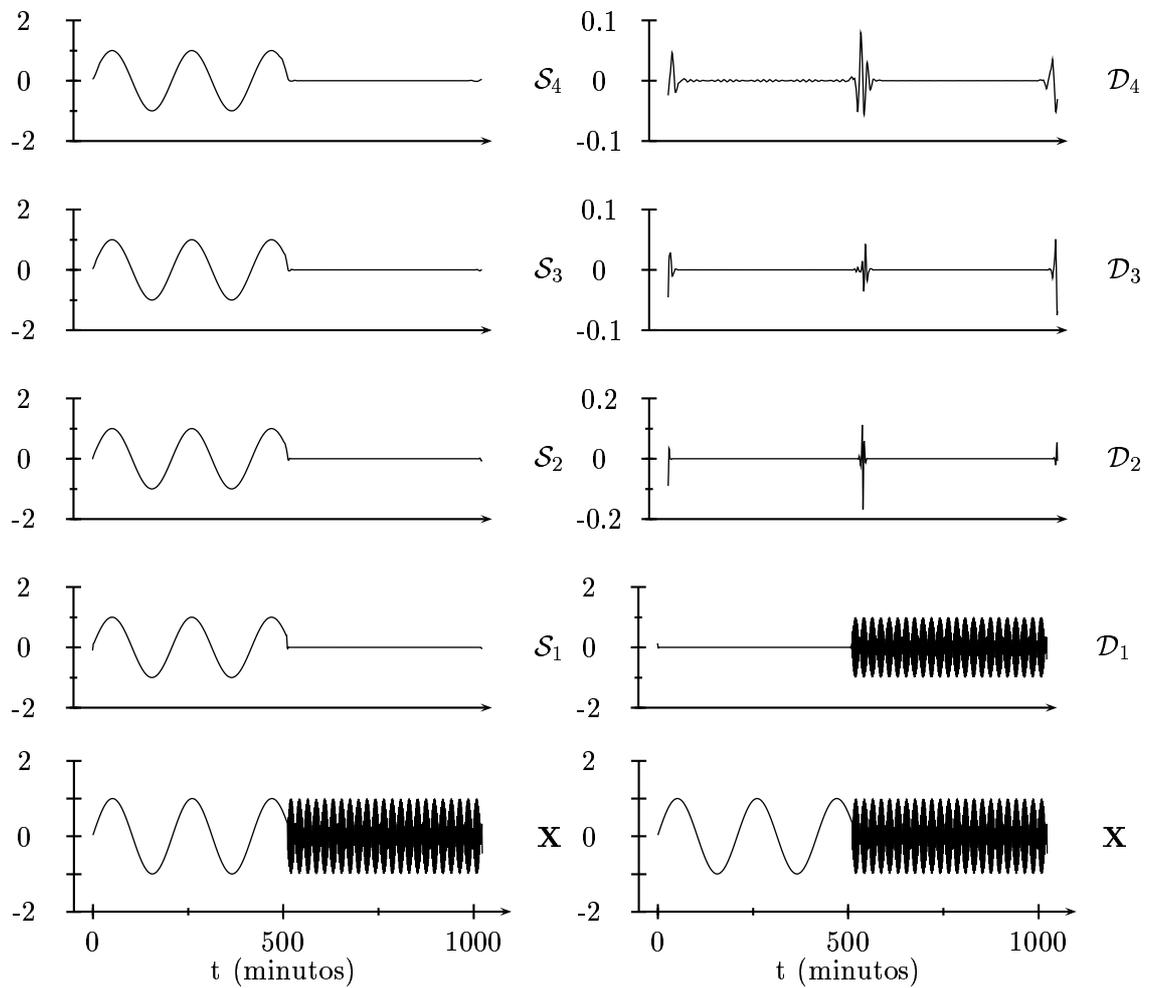


Figura 4.4: Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la primera (segunda) columna. La Serie, en este caso, es una sinusoidal con un cambio brusco de frecuencia.

DWT que lo que aporta es la importancia del rango de escalas 2 a 4 y 16 en adelante para la reconstrucción de la señal.

4.1.3. Ruido.

Se pretende con los siguientes gráficos mostrar el tratamiento que hace el análisis MRA de la transformada DWT con el ruido uniforme y normal. Las funciones de las señales objeto de interés son

$$s(t) = U\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad , \quad s(t) = N(0, 1)$$

según se trate de uno u otro. Las figuras 4.5 y 4.6 muestran los resultados y se caracterizan por la irregularidad de los detalles; obsérvese en el periodograma la cantidad de componentes que componen este tipo de señales.

El análisis se realiza con la wavelet de $LA(8)$ en $J_0 = 4$ niveles para ambos tipos de ruido. En este caso concreto no se hace para mayor número de etapas ni se separan las

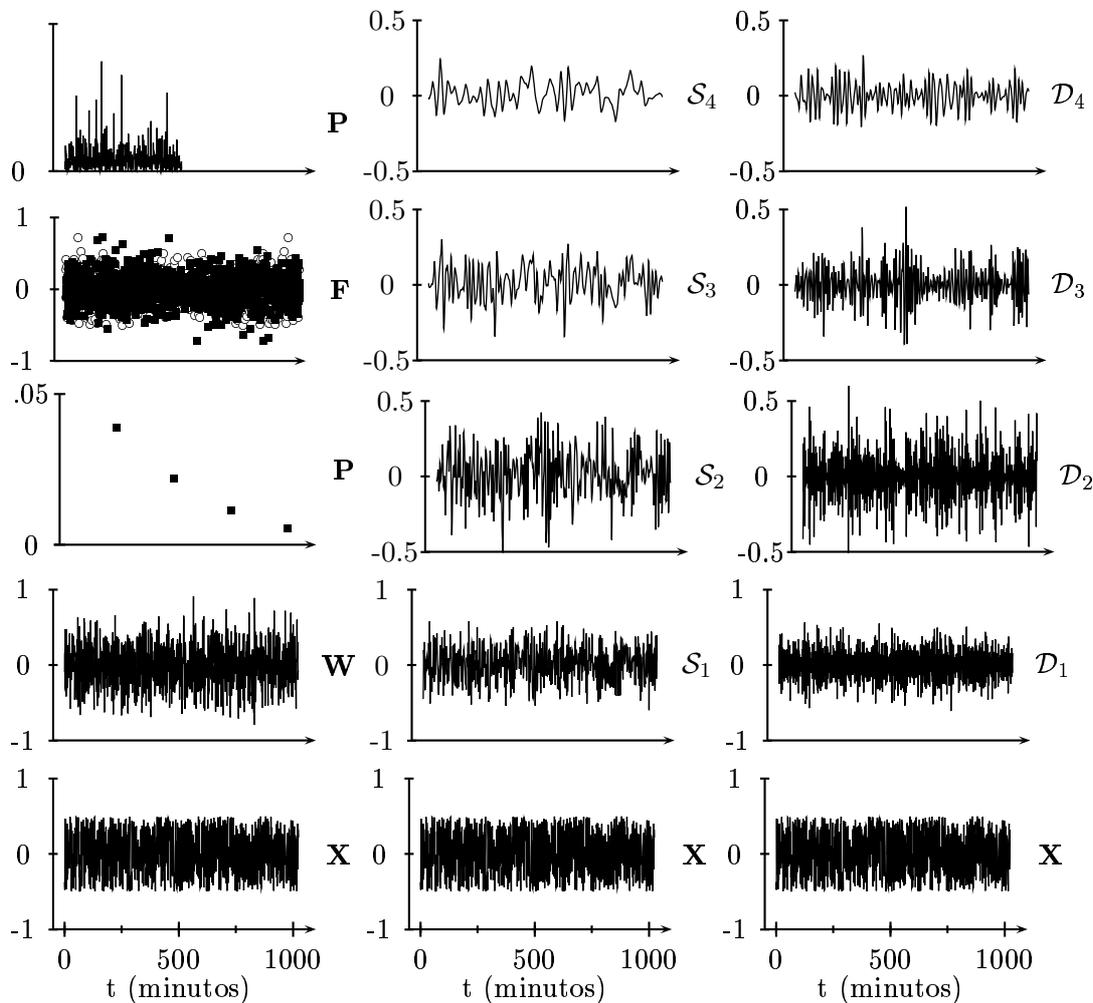


Figura 4.5: Serie, transformadas DWT de $LA(8)$ y periodograma, transformada de Fourier y periodograma. Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la segunda (tercera) columna. La Serie, en este caso, es ruido uniformemente distribuido en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

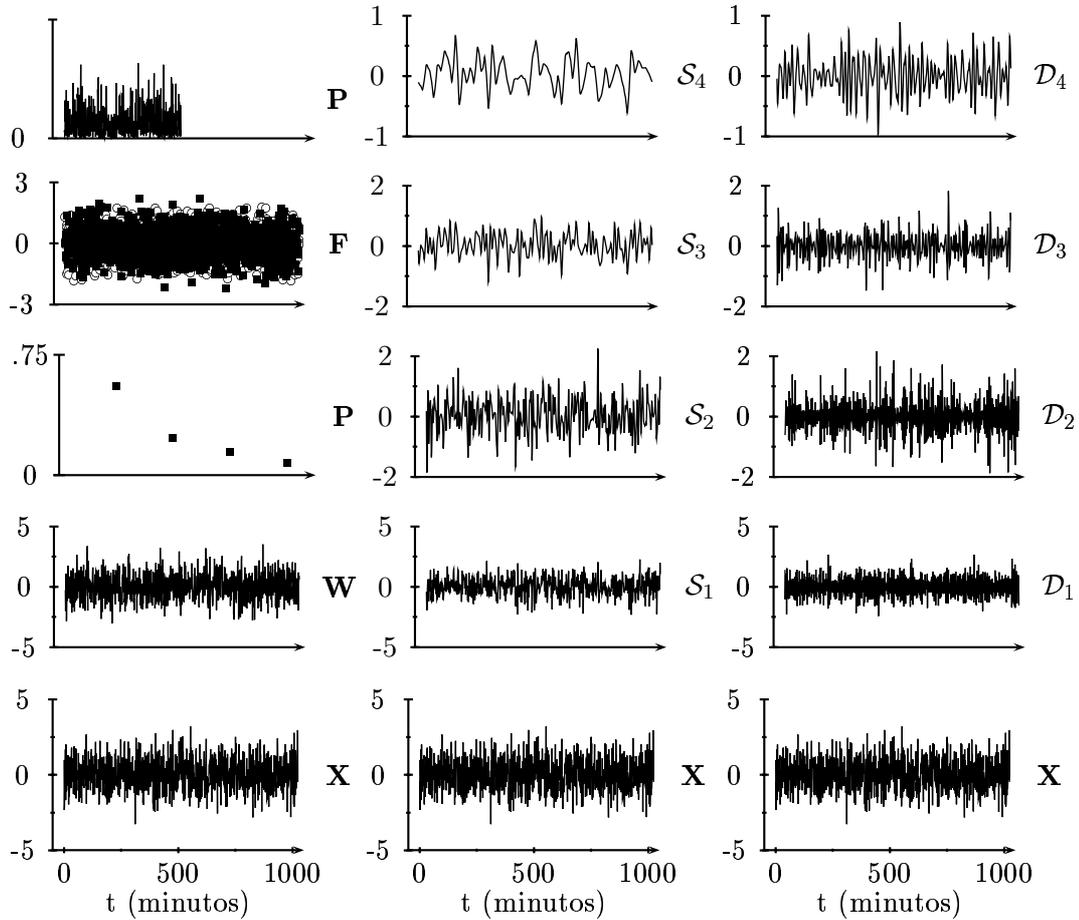


Figura 4.6: Serie, transformada DWT de $LA(8)$ y periodograma, transformada DFT y periodograma en la primera columna. Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la segunda (tercera) columna. La Serie, en este caso, es ruido normalmente distribuido (media 0, varianza 1).

gráficas de los periodogramas de las de los detalles y aproximaciones pues solo se pretende ilustrar el tratamiento que hace este análisis con el ruido.

4.1.4. Discontinuidades.

El objetivo es estudiar el comportamiento del MRA de la transformada DWT con un ejemplo básico de señal con discontinuidades de diversos órdenes de magnitud. El interés está en comprobar cómo los detalles del análisis MRA muestran las discontinuidades. La función que define la señal es

$$s_1(t) = \begin{cases} 0, & 1 \leq t \leq 256 \\ 1, & 256 < t \leq 512 \\ 3, & 512 < t \leq 768 \\ 6, & t > 768 \end{cases}$$

que presenta discontinuidades de salto (de diferente magnitud) en $t = 256, 512, 768$. El análisis se realiza con la wavelet de $LA(8)$ en $J_0 = 5$ etapas. Conviene recordar que para la detección pura de discontinuidades es preferible el uso de la wavelet de Haar pues muestra más claramente las rupturas de señal, sin embargo aquí lo hemos hecho con la wavelet de $LA(8)$ que también muestra con claridad lo deseado.

Obsérvese, en la figura 4.8, que los detalles recogen las discontinuidades de la señal en todos sus órdenes con picos tanto más grandes cuanto mayor es la magnitud del salto.

Los saltos de los extremos también se deben a la discontinuidad que hay entre el primer valor de la serie y el último porque, al igual que la transformada FFT, la transformación DWT trata a la serie de tamaño N como una porción de una secuencia infinita de período

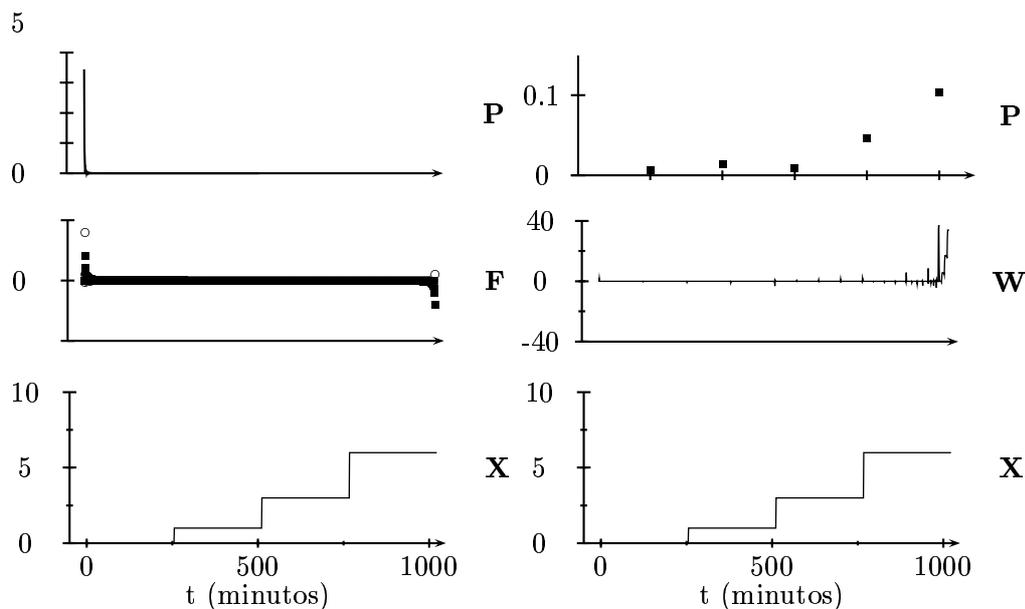


Figura 4.7: Serie, transformadas DWT de $LA(8)$ y periodograma, transformada de Fourier y periodograma. La Serie, en este caso, es una función escalonada.

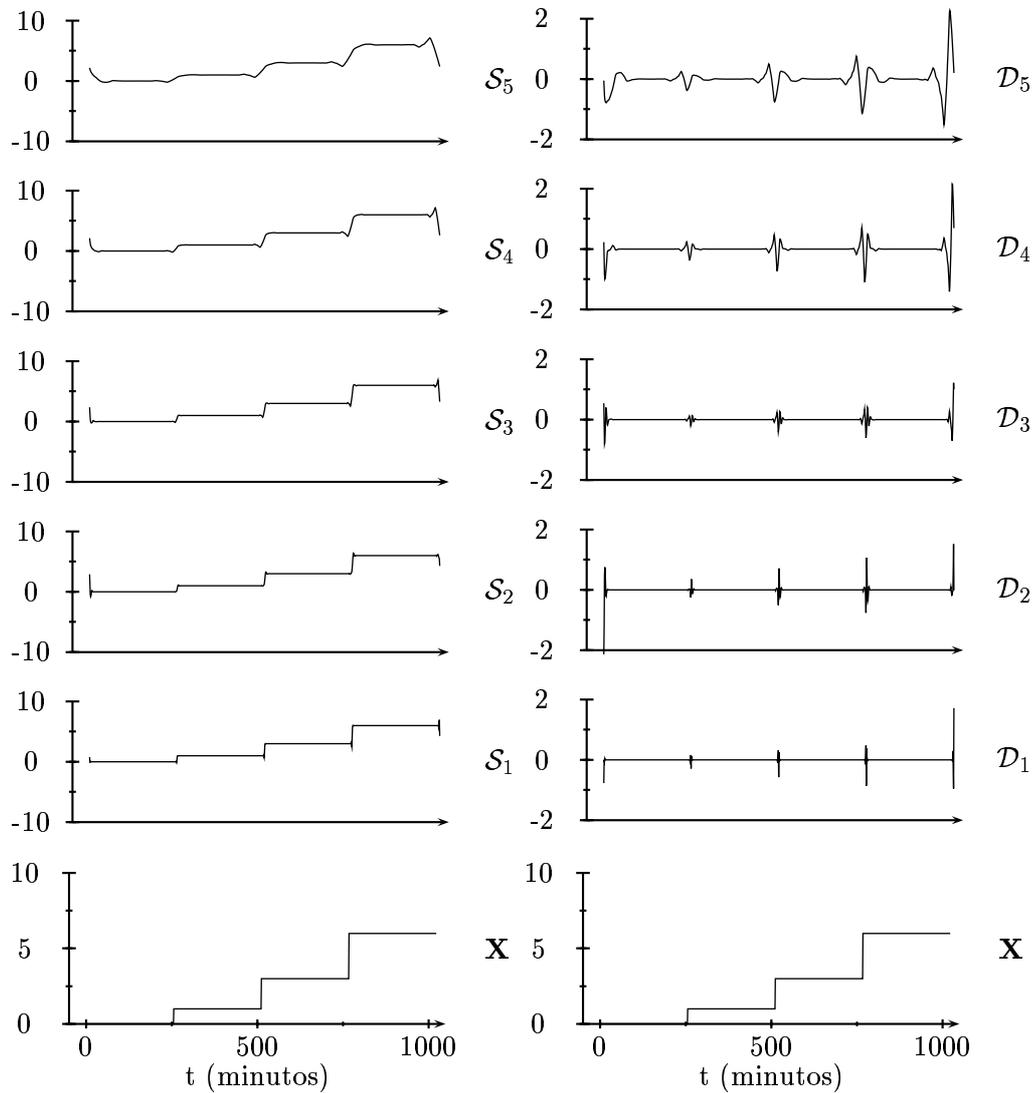


Figura 4.8: Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la primera (segunda) columna. La Serie, en este caso, es una función escalonada.

N. Si observamos con detenimiento nos daremos cuenta que la discontinuidad con mayor magnitud de salto es la que se produce entre dichos valores al considerarla una secuencia periódica, hecho que se aprecia con claridad en la figura 4.8.

4.1.5. Triángulo más seno.

En este ejemplo se muestra cómo la DWT detecta las componentes en una señal compuesta de un triángulo más un seno, esto es,

$$s(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{500} + \sin(0.3t), & 1 \leq t \leq 512 \\ \frac{1000-t}{500} + \sin(0.3t), & 512 \leq t \leq 1024 \end{cases}$$

El seno tiene una oscilación cada 20 minutos y el triángulo abarca la totalidad de los datos (una oscilación cada 1024 minutos).

Se verá en el análisis que la forma en la que el MRA wavelet detecta ambas componentes en la señal es captando la frecuencia del seno en el detalle correspondiente (periodo del seno en el rango de escala del detalle) y dejando el triángulo como componente que marque la tendencia general de la serie (este tipo de información siempre aparece en la aproximación de la última etapa).

Como se puede apreciar en la figura 4.10 la oscilación del seno (20 min) se capta en los detalles \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 (escalas de 8 a 16 y de 16 a 32). Sin embargo, el triángulo (oscilación de 1024 minutos) se encuentra en \mathcal{A}_6 (escala superior a 128) en un análisis MRA con la wavelet de $LA(8)$ en un total de $J_0 = 6$ etapas, hechos que corroboran lo mencionado en el párrafo anterior. Si la componente seno fuese ruido en la señal, de aquí se infiere un mecanismo muy elemental para limpiarla: “quedarnos con una aproximación de una etapa elevada tras un análisis MRA”.

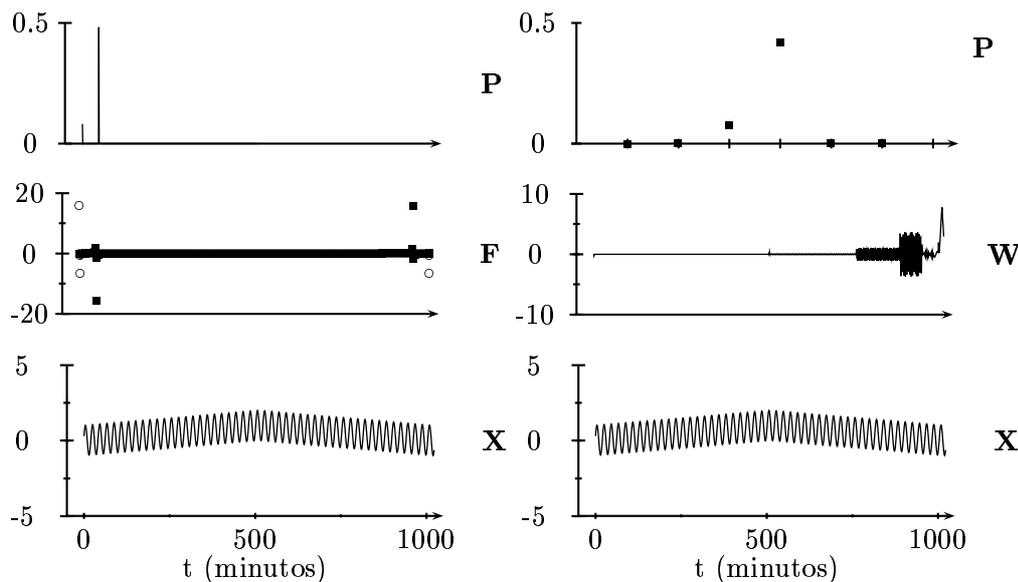


Figura 4.9: Serie, transformadas DWT de $LA(8)$ y periodograma, transformada de Fourier y periodograma. La Serie, en este caso, es una suma de un triángulo y un seno.

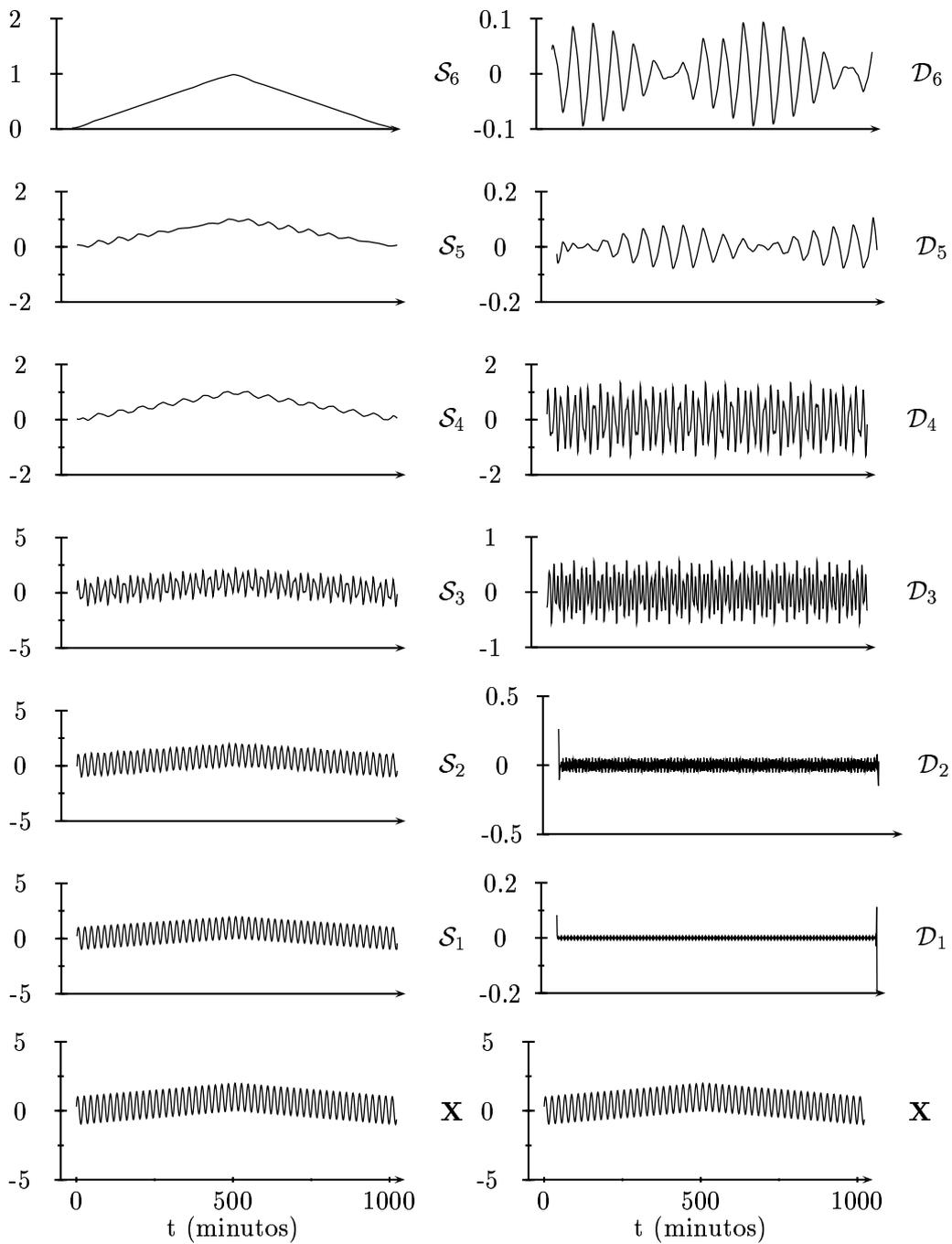


Figura 4.10: Serie y aproximaciones (detalles) de órdenes $j = 1, \dots, 5$ en la primera (segunda) columna. La Serie, en este caso, es una suma de un triángulo y un seno.

Obsérvese en la figura 4.9 que ambas frecuencias las detecta Fourier en el periodograma hecho que también se aprecia de alguna forma en el periodograma wavelet.

4.2. Ejemplos reales.

4.2.1. Electrocardiograma (ECG).

Como primer ejemplo del uso de la DWT con datos reales, consideremos la serie temporal \mathbf{X} de un electrocardiograma del ritmo de un paciente que experimenta arritmia ocasional. La serie consta de $N = 2048$ mediciones en milivoltios (180 muestras por segundo, es decir, con intervalo de muestreo $\Delta t = \frac{1}{180} \approx 0.3$ sg) cubriendo un total de 11.38 segundos y es una buena candidata a un análisis MRA debido a que sus componentes están en diferentes escalas. Las fluctuaciones de escala más grande (frecuencia más baja) corresponden al movimiento de la respiración del paciente y dan la forma de la línea base de la serie mientras que las fluctuaciones de escala más pequeña (frecuencia más alta) presentes en la serie cada 3–4 segundos se deben al movimiento del paciente. Ninguna de estas fluctuaciones está directamente relacionada con el corazón. Los picos más grandes que ocurren cada 0.7 segundos, etiquetados con la letra R , corresponden a las ondas R del ritmo normal del corazón; la onda anterior a cada onda R se conoce por onda P y la posterior, onda T. Uno de estos complejos PRT está dibujado en la figura 4.11.

Las figuras 4.12, 4.14, 4.16 y 4.18 muestran el MRA de nivel $J_0 = 6$ para las DWT de Haar, $D(4)$, $C(6)$ y $LA(8)$ respectivamente, mientras que las figuras 4.13, 4.15, 4.17 y 4.19 muestran las aproximaciones que proporcionan los análisis de niveles $j = 1, \dots, 6$ de la serie ECG para las DWT de Haar, $D(4)$, $C(6)$ y $LA(8)$ respectivamente. Para las cuatro wavelets, los detalles \mathcal{D}_j tienen media nula mientras que las componentes suaves \mathcal{S}_6 , igual a la media de \mathbf{X} . Los MRA satisfacen que

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^6 \mathcal{D}_j + \mathcal{S}_6$$

Cualitativamente, el MRA de la DWT $LA(8)$ es más suave, hecho que se observa a simple vista: los detalles de alto nivel de Haar tienen apariencia de bloques mientras que los correspondientes a la DWT $D(4)$ y $C(6)$ presentan una apariencia triangular, hecho que observa de forma más notoria en ambos casos en \mathcal{D}_6 y \mathcal{S}_6 .

La razón por la que ocurre esto es debida a que los detalles de nivel j , \mathcal{D}_j , son combinaciones lineales de las filas de \mathcal{W} asociadas a escala $\tau_j \Delta t$ (véase ecuación (3.5)) que se forman a partir de versiones periodizadas del filtro wavelet de nivel j , $\{h_{j,l}\}$, y sus traslaciones.

Observando las figuras 3.15 y 3.18 se puede apreciar que la apariencia de los detalles de alto nivel correspondientes al MRA de $D(4)$ y $C(6)$ responde a la naturaleza de los filtros wavelet de alto nivel correspondientes a dichas wavelets. Por el contrario, la casi-simetría y suavidad de los filtros relativos a la DWT $LA(8)$ parece propocionar una mejor

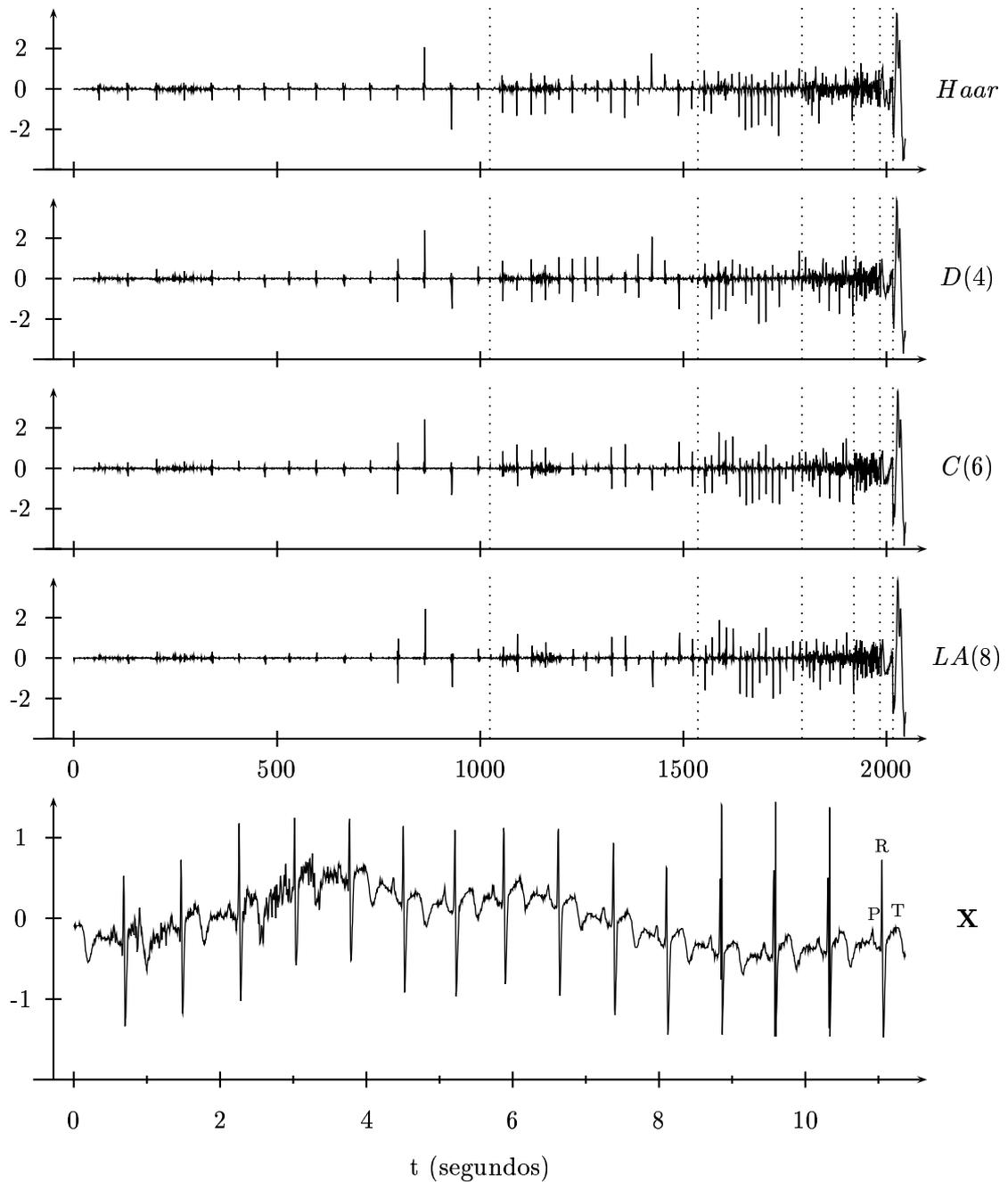


Figura 4.11: Coeficientes de la DWT parcial de Haar, $D(4)$, $C(6)$ y $LA(8)$ para la serie ECG (datos extraídos de la Universidad de Washington) con $J_0 = 6$. Las líneas punteadas separan los coeficientes correspondientes a $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \mathbf{W}_3, \mathbf{W}_4, \mathbf{W}_5, \mathbf{W}_6$ y \mathbf{V}_6 .

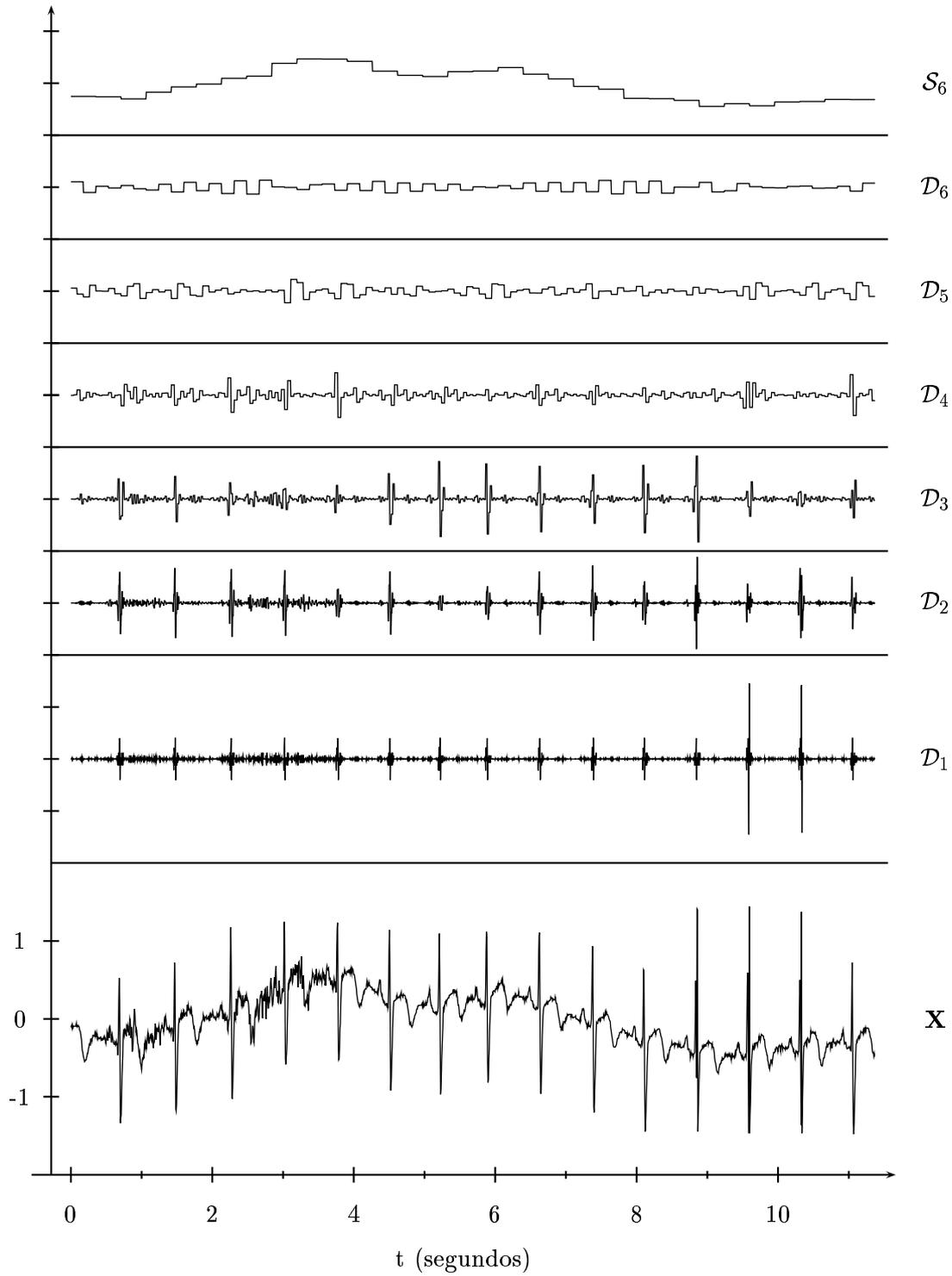


Figura 4.12: Análisis multirresolución (MRA) con la DWT de Haar para la serie ECG.

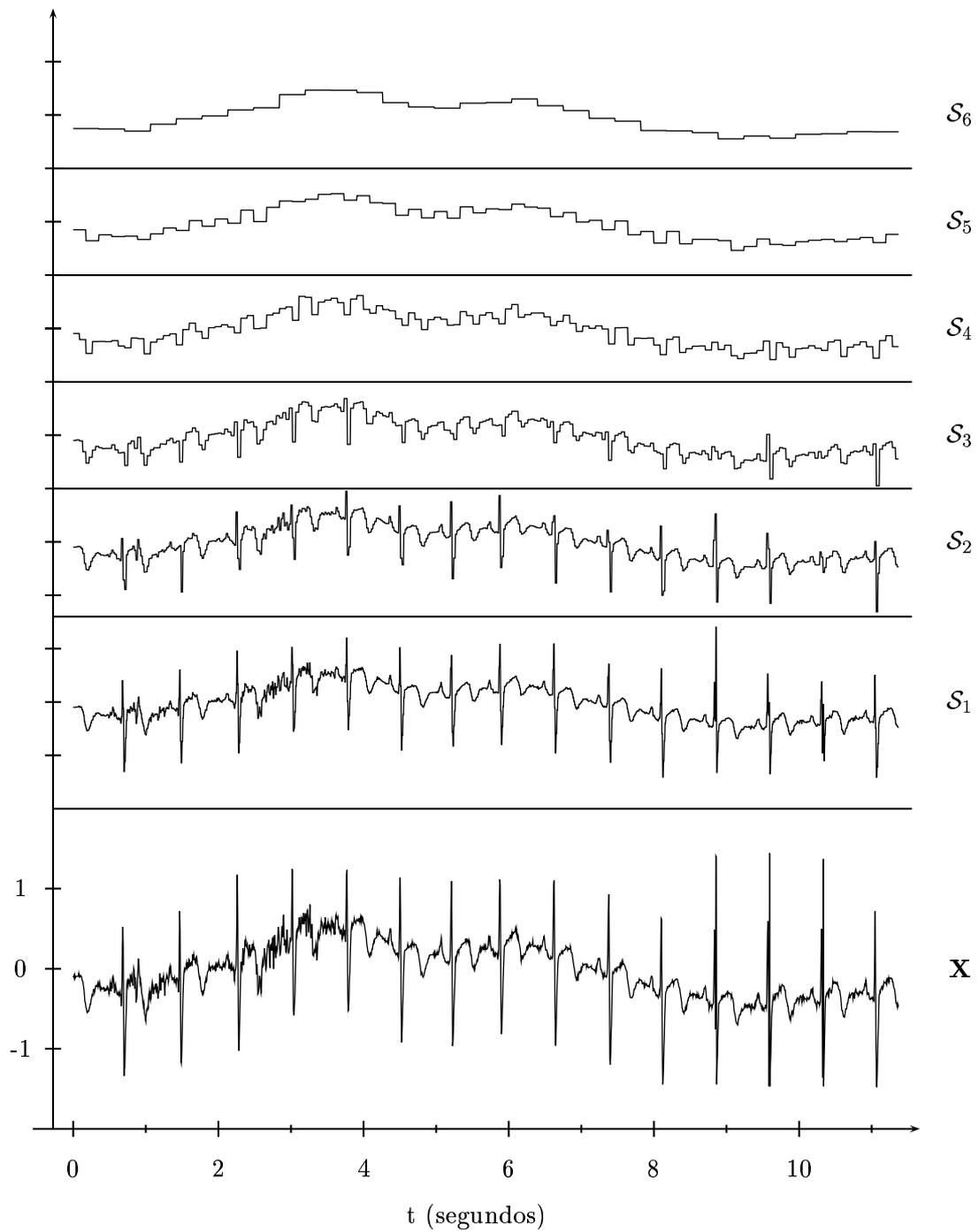


Figura 4.13: Aproximaciones de niveles $j = 1, 2, \dots, 6$ con la DWT de Haar para la serie ECG.

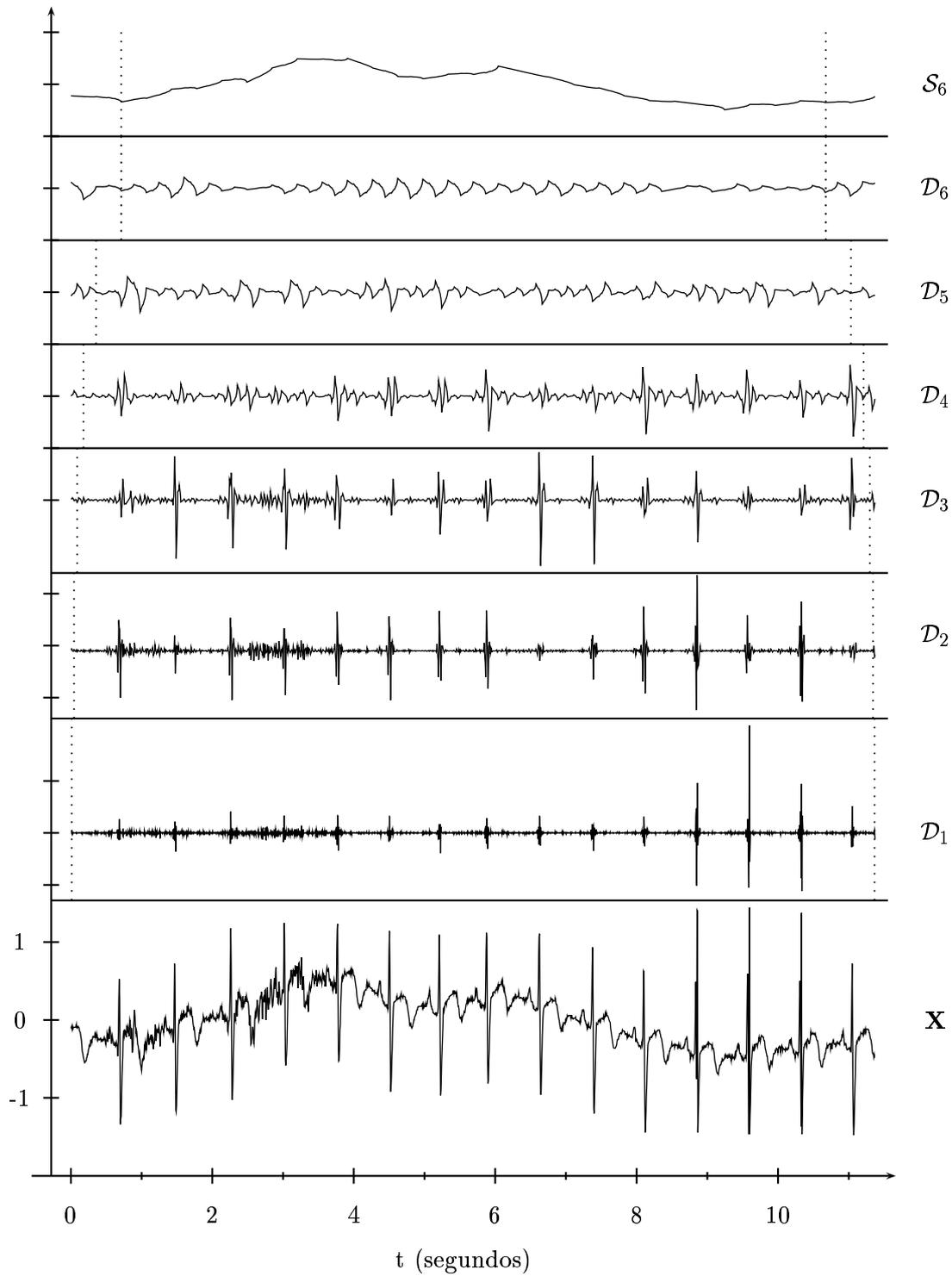


Figura 4.14: Análisis multirresolución (MRA) con la DWT $D(4)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

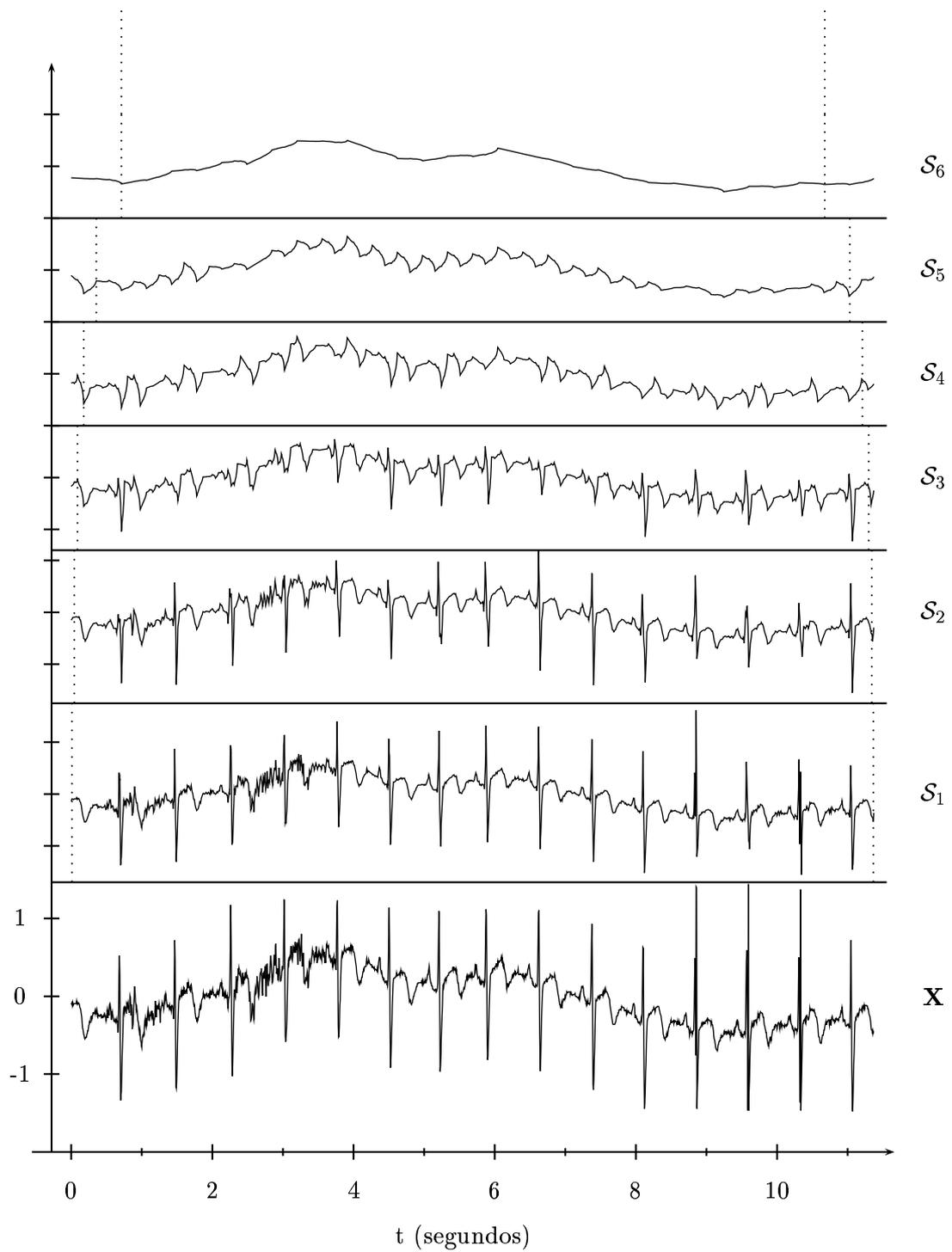


Figura 4.15: Aproximaciones de niveles $j = 1, 2, \dots, 6$ con la DWT $D(4)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

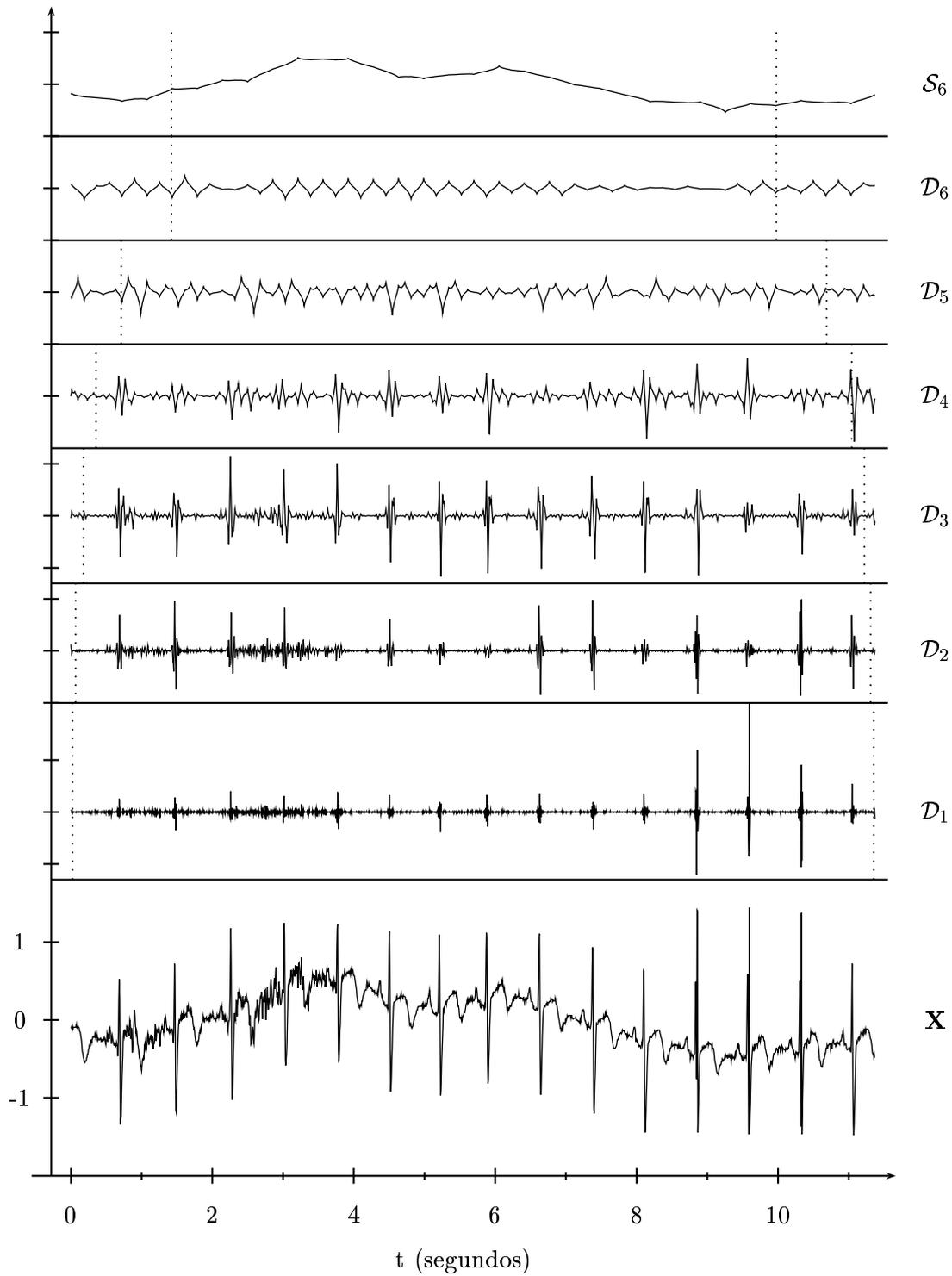


Figura 4.16: Análisis multirresolución (MRA) con la DWT $C(6)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

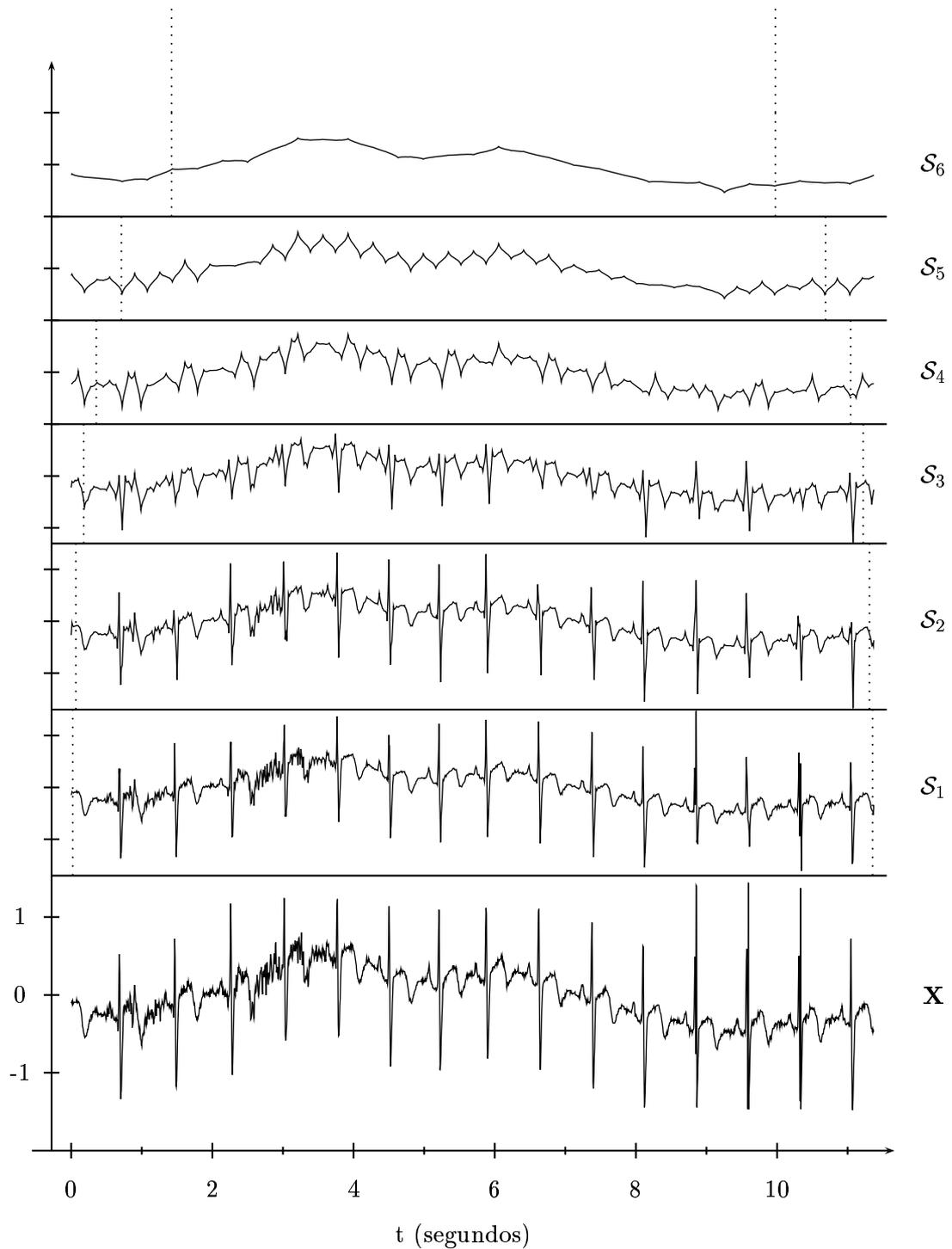


Figura 4.17: Aproximaciones de niveles $j = 1, 2, \dots, 6$ con la DWT $C(6)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

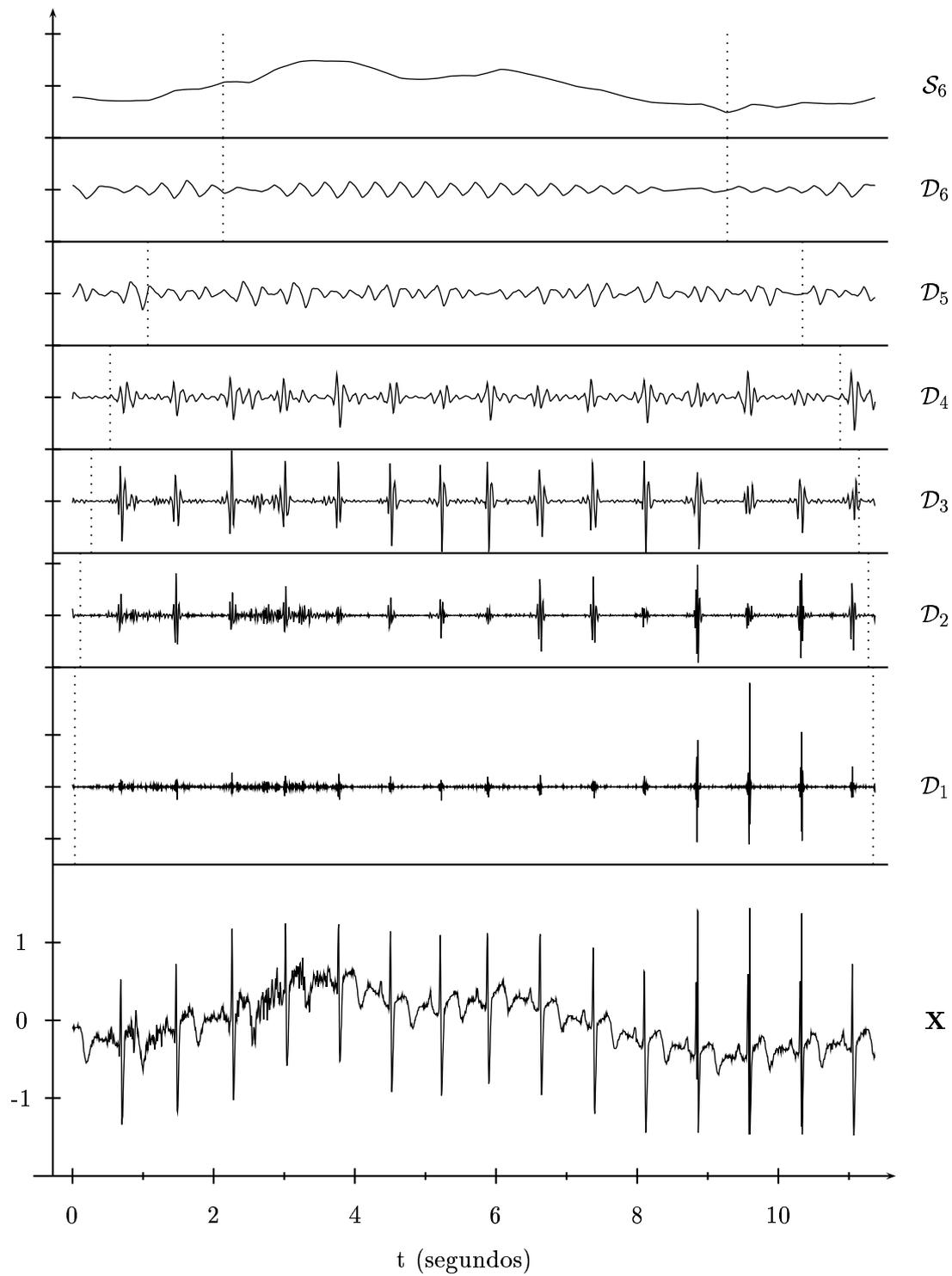


Figura 4.18: Análisis multirresolución (MRA) con la DWT $LA(8)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

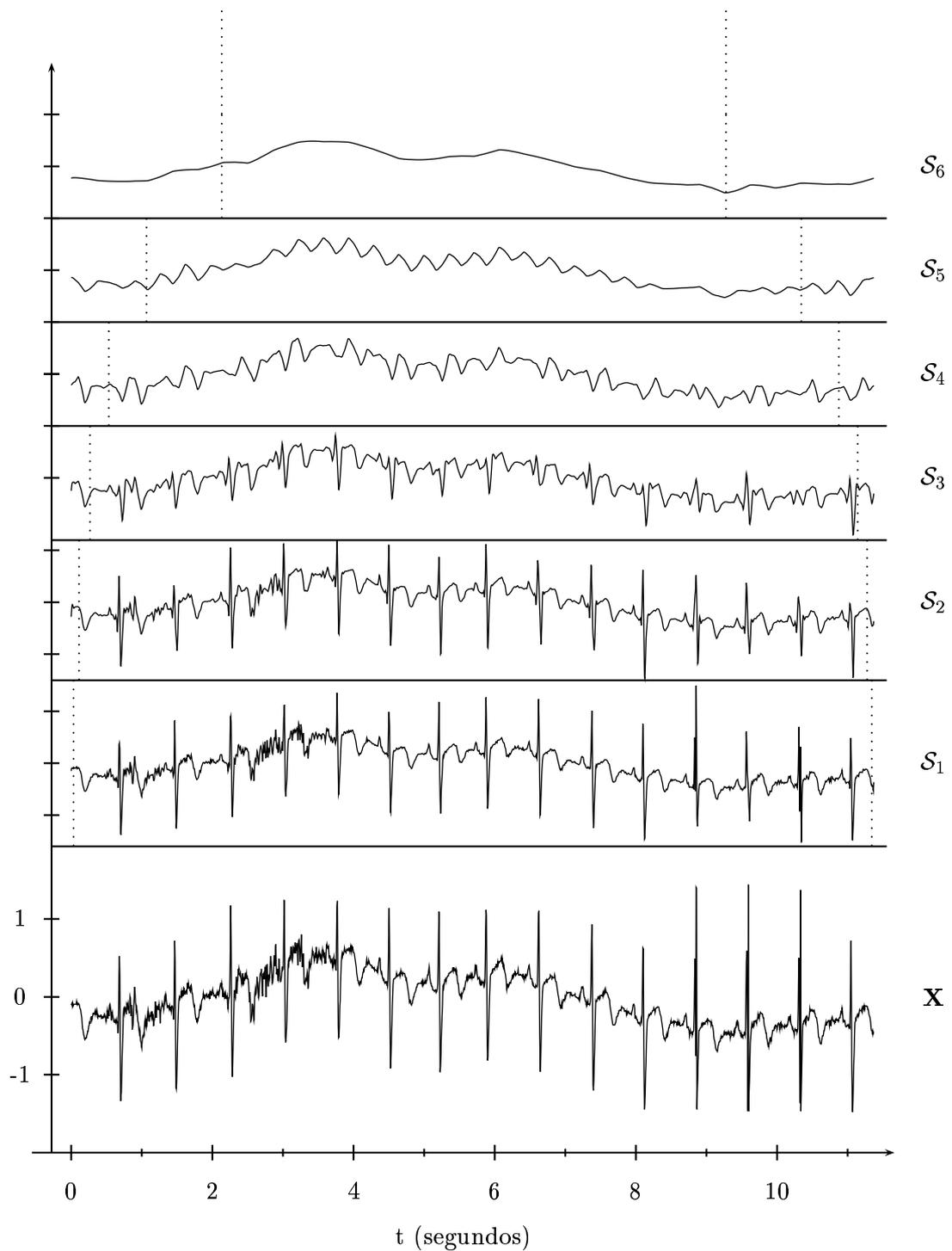


Figura 4.19: Aproximaciones de niveles $j = 1, 2, \dots, 6$ con la DWT $LA(8)$ para la serie ECG. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

aproximación de la información de la serie en el sentido que las componentes del MRA están más influenciadas por los datos propios de la serie que por el perfil de los filtros.

La naturaleza del MRA basado en una descomposición a diferentes escalas separa las componentes de la serie ECG en trozos susceptibles de ser analizados posteriormente. Por ejemplo, como \mathcal{D}_5 y \mathcal{D}_6 reflejan los cambios sobre escala física $\tau_5\Delta t = 16\Delta t \approx 0.09$ sg y $\tau_6\Delta t = 32\Delta t \approx 0.18$ sg, estos detalles extraen la información relativa a las ondas P y ondas T. Obsérvese que la componente suave \mathcal{S}_6 en la DWT $LA(8)$ refleja acertadamente la línea base de la serie. Por otra parte, las fluctuaciones de baja escala debidas al movimiento del paciente están aisladas en los detalles de niveles 1 y 2.

Sin embargo, para el MRA de $LA(8)$, también existen ciertos artificios que se aprecian en comparación de los resultados de una MRA basado en la DWT de “solapamiento máximo”, que se conoce por MODWT y que están relacionados con como la DWT maneja las condiciones de frontera iniciales y finales de la serie.

4.2.2. Consumo eléctrico (ECS).

Los datos corresponden a la medida del consumo de una planta eléctrica tomadas cada minuto a lo largo de aproximadamente 3 días obteniéndose un total de $N = 4096$ muestras. Dichas medidas están corregidas de algunos agentes externos conocidos, errores debido a condiciones climatológicas, ... por el aparato de medida salvo en los errores de lectura.

Del comportamiento de la serie, destacar algunos aspectos fundamentales:

- (1) Aproximadamente el 50% del consumo total corresponde a las industrias mientras que el resto, a los consumidores particulares. Por tanto la curva contendrá dos componentes: una regular (con cambios en baja frecuencia) correspondiente al consumo de éstas y otra irregular con componentes de alta frecuencia, relativa a los consumidores particulares (hay aproximadamente 10 millones).
- (2) Los períodos fundamentales de la serie serán los días y las semanas debido al ritmo de la actividad económica.
- (3) Los patrones de consumo diario varían debido a diversas condiciones como el frío variable de un día a otro, etc.
- (4) Los errores de lectura están en la serie pero se ha rellenado una parte que faltaba por interpolación por splines.
- (5) A lo largo de las observaciones desde $t = 2400$ hasta $t = 3400$ se detectan fallos en los sensores de medida (recordar que se trata de 10 millones de sensores acumulados).

Como ejemplo de análisis realizaremos un breve análisis global y dos análisis locales correspondientes a un intervalo durante el mediodía y otro durante el final de la noche.

El primer intervalo presenta una alta actividad con cambios veloces de consumo y gran consumo por lo que la estructura de la señal es compleja; el segundo, con baja actividad y cambios graduales, presenta una estructura más simple. Utilizaremos la wavelet $LA(8)$ haciendo una descomposición parcial de $J_0 = 6$ niveles (asumiendo querer capturar cambios en escalas menores a $2^6 = 64$).

Respecto al análisis global de la serie, en la figura 4.20 se observa que las deficiencias de lecturas anteriormente mencionadas, quedan visibles en los detalles de órdenes 1 y 2, ambos de igual orden de magnitud, en los valores desde $t \approx 2400$ hasta $t \approx 3400$. La aproximación de orden 3, ver figura 4.21, captura las componentes principales de la serie además de su forma siendo la contribución más significativa la del detalle de orden 3 por lo que los cambios más significativos se producen por componentes con periodos inferiores a 16 minutos. Ésto también se observa en que las aproximaciones de órdenes superiores a 3 son más homogéneas entre sí.

Respecto al análisis local, localizaremos las gráficas del análisis global en determinados intervalos.

Medio día: El intervalo de tiempo de interés es desde $t = 2200$ hasta $t = 3700$ correspondiente a aproximadamente un día a partir de las 12:30pm. Los detalles de órdenes 1 y 2 (ver figura 4.22) recogen las variaciones debidas a las imprecisiones de los instrumentos de medida observándose claramente que el intervalo de medición irregular esta en $t = 2500, \dots, 3400$ y que hay dos errores (picos) en los instrumentos de medida en tales puntos. Además el detalle de orden 4 añade los aspectos principales de la serie. Si se observa con detalle es en este detalle donde se detecta la interpolación por splines realizada en el intervalo $t = 2865, \dots, 2885$.

Final de la noche: El intervalo es, en este caso, desde $t = 1500$ hasta $t = 1800$ y corresponde a un periodo de aproximadamente 5 horas durante el final de la noche. Observando la figura 4.23 es difícil distinguir un extremo en las proximidades de $t = 1600$ y $t = 1625$ que se detecta claramente en \mathcal{D}_1 . La aproximación que proporciona \mathcal{A}_3 es buena salvo en tales puntos siendo las de orden superior casi-lineales a trozos. Se tiene que las componentes principales de la serie (y más significativas) las proporcionan \mathcal{D}_3 y \mathcal{D}_4 .

4.3. Consideraciones prácticas.

De la misma forma que en el ejemplo anterior existen determinadas consideraciones prácticas que deben tenerse en cuenta para realizar un análisis wavelet de una serie temporal. En esta sección veremos algunas elecciones que debemos realizar y algunas opciones para manejar las condiciones de frontera.

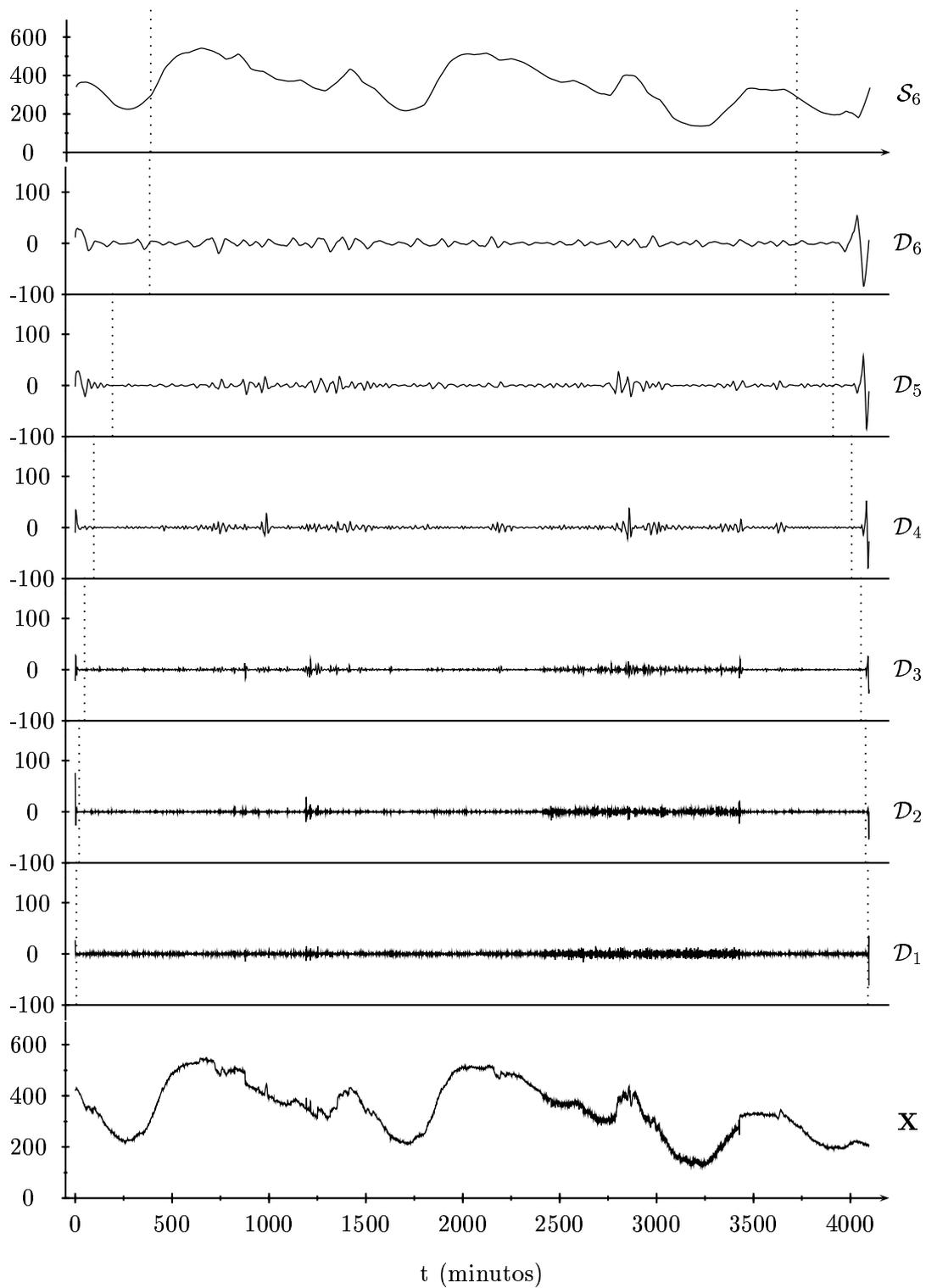


Figura 4.20: Análisis multiresolución (MRA) con la $DWT LA(8)$ para la serie ECS. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

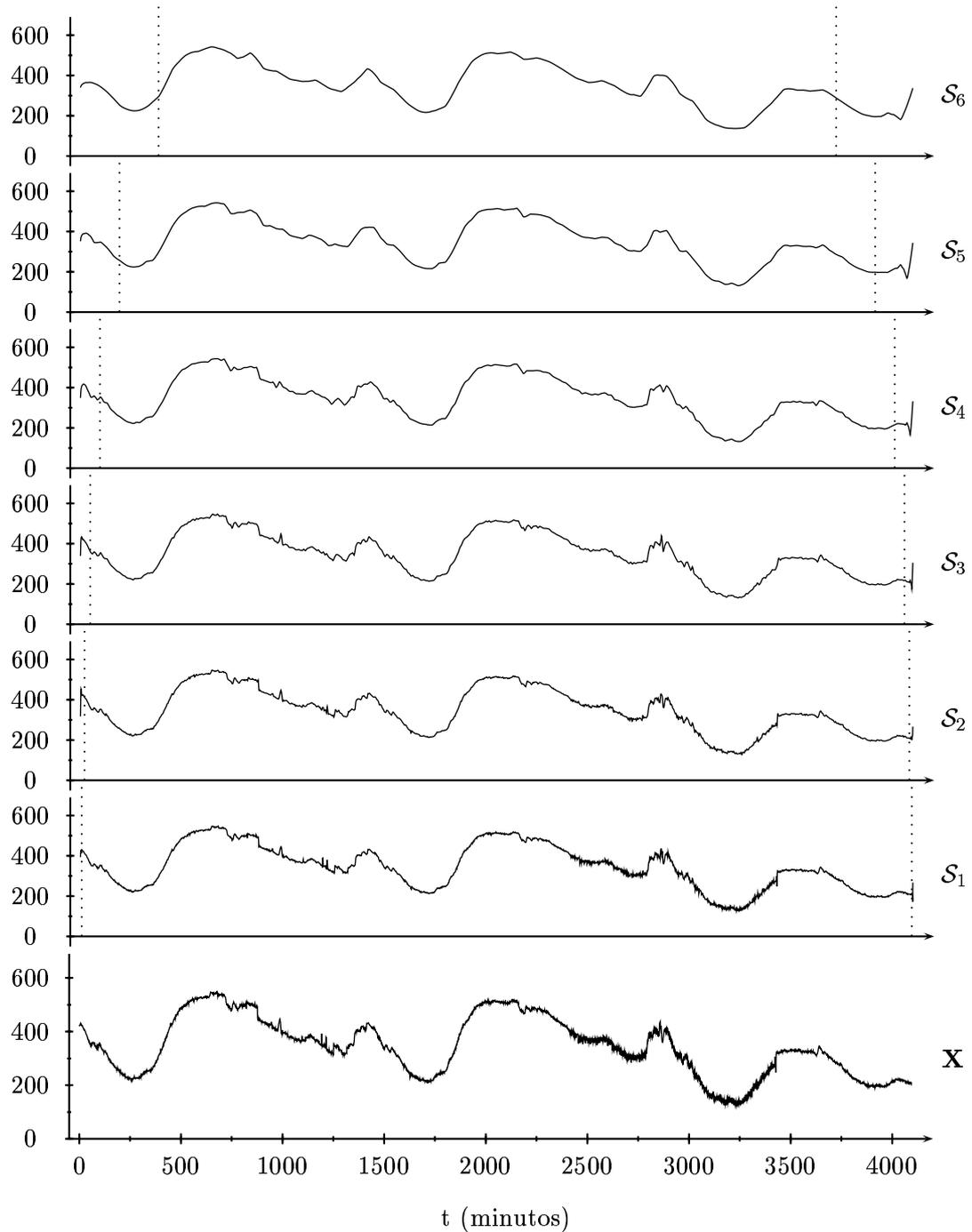


Figura 4.21: Aproximaciones de órdenes $j = 1, \dots, 6$ con la DWT $LA(8)$ para la serie ECS. Las líneas discontinúas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

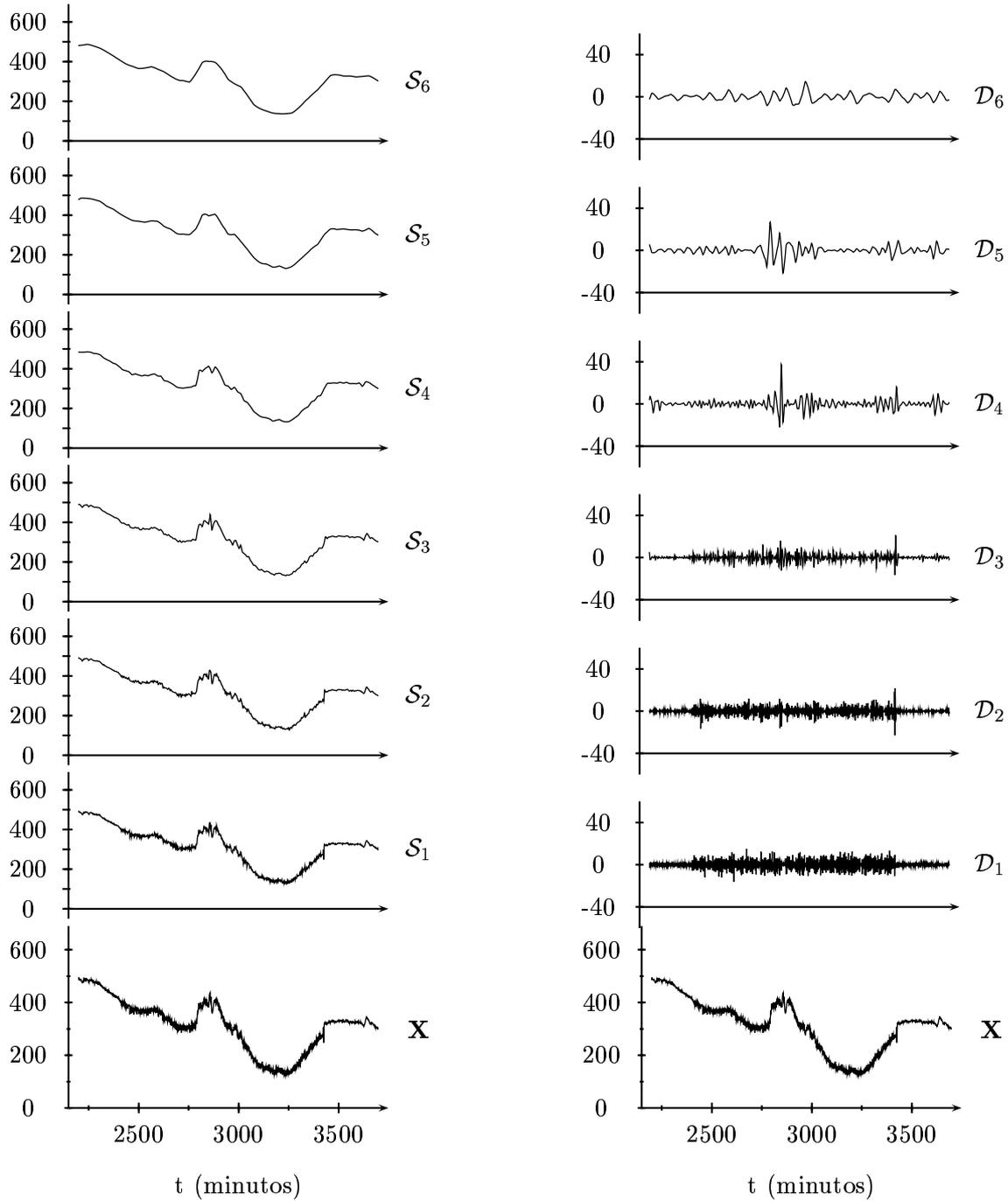


Figura 4.22: Aproximaciones y detalles de órdenes $j = 1, \dots, 6$ con la DWT $LA(8)$ para un tramo de un día a partir de las 12:30 h. del mediodía.

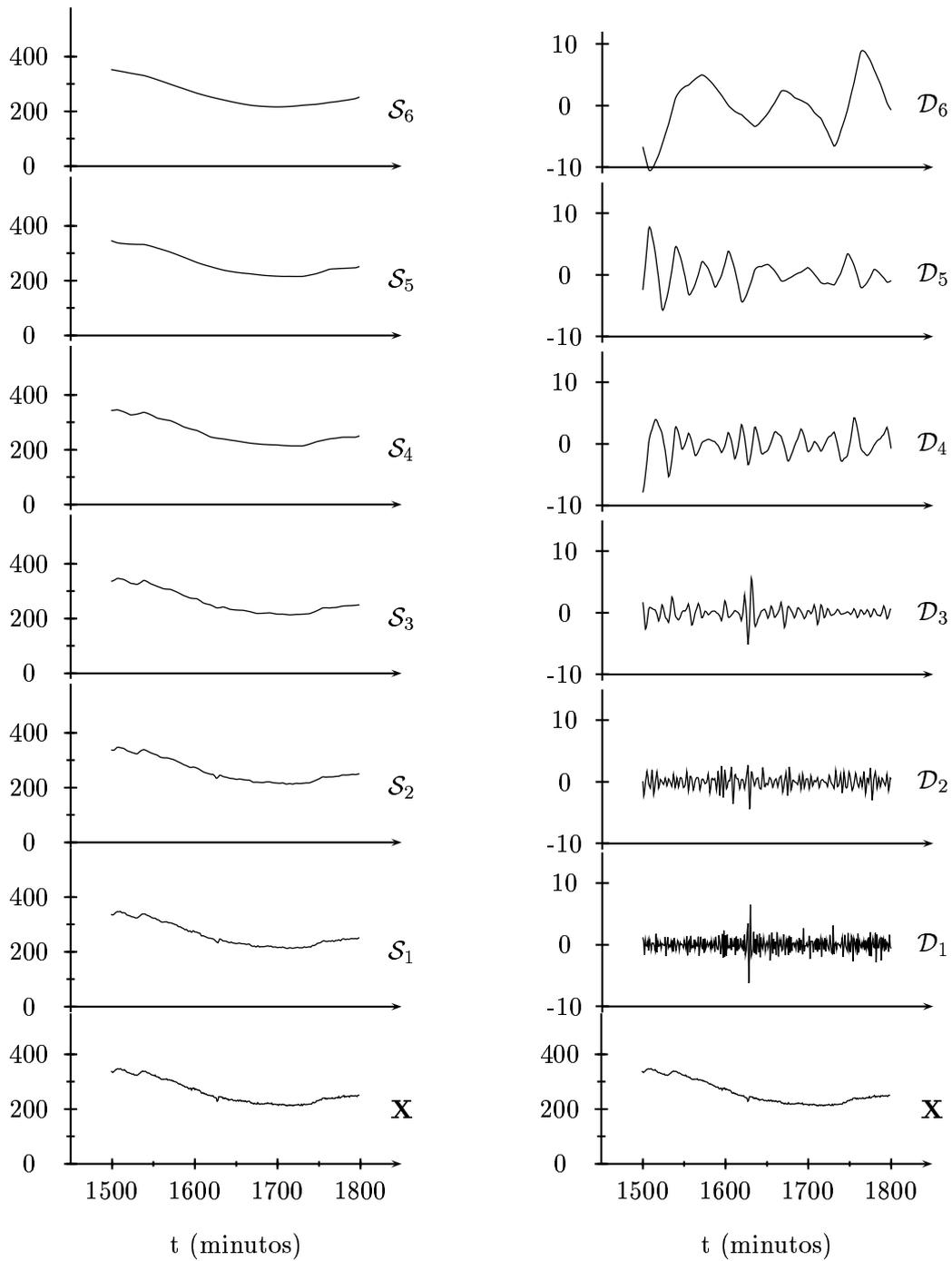


Figura 4.23: Aproximaciones y detalles de órdenes $j = 1, \dots, 6$ con la DWT $LA(8)$ para un tramo 5 h. del final de la noche.

4.3.1. Elección del filtro wavelet.

El primer problema que se presenta es cómo elegir adecuadamente un filtro wavelet concreto de los expuestos en las secciones anteriores.

Como se ha podido observar en el ejemplo del ECG, la elección adecuada depende mucho de la aplicación que se le vaya a dar a dicho análisis y del tipo de serie que vayamos a analizar, es decir existe una relación directa entre el tipo de objetivo del análisis (tal como aislamiento de eventos en la serie, estimación de señal, estimación de parámetros en procesos de larga memoria, test de homogeneidad de la varianza, estimación de la varianza wavelet,...) y las propiedades requeridas para el filtro wavelet para alcanzar dicho objetivo.

Generalmente, la elección viene determinada en un intento de equilibrar dos consideraciones. Por una parte, los filtros wavelet de anchura corta ($L = 2, 4, 6$) pueden conducir a artificios indeseables en los resultados del análisis como ocurría en los MRA de la DWT de Haar, $D(4)$, y $C(6)$ del ECG (figuras 4.12, 4.14 y 4.16) que resultaron en bloques y triángulos en los detalles de orden superior. Por otra parte, los filtros wavelet de anchura elevadas pueden conducir a una mejor aproximación de las características de la serie pero su uso puede conducir a mucho coeficientes influenciados en exceso de las condiciones de frontera, a un descenso en el grado de localización de los coeficientes DWT y a un elevado coste computacional.

Si la estrategia general es usar el menor valor de L que proporcione resultados razonables. En la práctica, implica necesariamente la comparación de análisis preliminares aumentando el valor de L , hasta obtener un análisis que esté libre de artificios atribuibles al filtro wavelet.

Si se combina la estrategia anterior con el requerimiento de que los coeficientes DWT resulten alineables en el tiempo con los de la serie (es decir tengan una fase cercana a cero), a menudo se tiene a la wavelet $LA(8)$ como una buena elección. Si el alineamiento de los coeficientes wavelet resulta importante y se elige el filtro $LA(8)$, es mejor tomar uno cuya mitad de anchura, $\frac{L}{2}$ sea par pues tienen funciones fase que son mejor aproximación a fase lineal.

4.3.2. Condiciones de frontera.

La transformada DWT hace uso del filtrado circular que, cerca de los extremos de la serie, la trata como si fuera una porción de una secuencia periódica de período N , es decir

$$X_t = X_{t \bmod N}$$

Esta asunción es razonable para determinadas series si el tamaño se elige adecuadamente. Por ejemplo en la serie de los niveles subtidiales del mar, ésta tiene una componente anual fuerte por lo que puede ser tratada como una serie circular con validez si el número

de observaciones cubre un múltiplo de un año. Para otras series la circularidad es una asunción problemática sobre todo cuando existe una fuerte discontinuidad entre X_0 y X_{N-1} .

Dado que dicha asunción puede ser cuestionable debemos considerar cuidadosamente cómo afecta exactamente al análisis de la serie. Recordemos que los coeficientes wavelet de nivel j venían dados por

$$W_{j,t} = \sqrt{2^j} \widetilde{W}_{j,2^j(t+1)-1}, \quad t = 0, \dots, N_j - 1$$

donde $N_j = \frac{N}{2^j}$ siendo

$$\sqrt{2^j} \widetilde{W}_{j,t} = \sum_{l=0}^{L_j-1} h_{j,l} X_{t-l \bmod N}, \quad t = 0, \dots, N - 1$$

para $L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$ que resulta ser la anchura de $\{h_{j,l}\}$.

Así pues, en el filtrado circular de $\{X_t\}$ con $\{h_{j,l}\}$ que proporciona $\{\sqrt{2^j} \widetilde{W}_{j,t}\}$, los valores de los índices $t = 0, \dots, L_j - 2$ de la salida a tal filtrado hacen uso explícito de la asunción de circularidad mientras que los indizados por $t = L_j - 1, \dots, N - 1$ no. El índice t del primer coeficiente wavelet $W_{j,t}$ que no resulta afectado por la circularidad es el menor que satisface que

$$2^j(t+1) - 1 \geq L_j - 1$$

o equivalentemente

$$t \geq \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(L - 2) \implies t = \left\lceil \left(1 - \frac{1}{2^j}\right)(L - 2) \right\rceil = L'_j.$$

Además, como $L'_j = L - 2$ ocurre si y sólo si $(L - 2)\left(1 - \frac{1}{2^j}\right) > L - 3$, entonces

$$L'_j = L - 2, \quad \text{siempre que } 2^j > L - 2.$$

Bajo la hipótesis de que $L'_j \leq N_j$ podemos interpretar L'_j como el número de coeficientes de $W_{j,t}$ afectados por la circularidad que, en general, resulta ser $\min\{L'_j, N_j\}$ y a los que nos referiremos mediante el término **coeficientes de frontera**. Véase la tabla 4.1 que proporciona dichos valores para diferentes anchuras L .

Con una línea similar de razonamiento se tiene que el número de coeficientes escala que son frontera en una DWT parcial de nivel J_0 es $\min\{L'_{J_0}, N_{J_0}\}$. Cómo se observa en la tabla 4.1, L'_j no depende de N , crece cuando L crece y no es no decreciente al crecer j . Además satisface que $\frac{L}{2} - 1 \leq L'_j \leq L - 2$.

Veamos ahora como afecta la circularidad a los detalles \mathcal{D}_j . Dado que

$$\mathcal{D}_j = \mathcal{W}_j^T \mathbf{W}_j = \sum_{n=0}^{N_j-1} W_{j,n} \mathcal{W}_{j,n}$$

L	L'_1	L'_2	L'_3	L'_4	$L'_{j \geq 5}$
2	0	0	0	0	0
4	1	2	2	2	2
6	2	3	4	4	4
8	3	5	6	6	6
10	4	6	7	8	8
12	5	8	9	10	10
14	6	9	11	12	12
16	7	11	13	14	14
18	8	12	14	15	16
20	9	14	16	17	18

Cuadro 4.1: Número L'_j de coeficientes de frontera en \mathbf{W}_j o \mathbf{V}_j basados en un filtro wavelet de anchura L donde se asume que $L'_j \leq N_j$.

donde $\mathcal{W}_{j,n\bullet} = (\mathcal{W}_j)_{n\bullet}^T$ es un vector columna cuyos elementos son los de la fila n -ésima de \mathcal{W}_j . Cuando $L'_j \leq N_j$, sabemos que los coeficientes frontera son

$$W_{j,n}, \quad n = 0, \dots, L'_j - 1$$

por lo que escribimos

$$\mathcal{D}_j = \sum_{n=0}^{L'_j-1} W_{j,n} \mathcal{W}_{j,n\bullet} + \sum_{n=L'_j}^{N_j-1} W_{j,n} \mathcal{W}_{j,n\bullet}$$

separando las componentes afectadas por la circularidad de las que no. Basta, por tanto, determinar a que índices de \mathcal{D}_j afecta la expresión

$$\sum_{n=0}^{L'_j-1} W_{j,n} \mathcal{W}_{j,n\bullet}$$

Para ello, considerando que

$$\mathcal{W}_{j,k\bullet} = (\mathcal{W}_j)_{k\bullet}^T = \left[\mathcal{T}^{k2^j} (\mathcal{W}_j)_{0\bullet} \right]^T$$

es decir, son traslaciones de $k2^j$ elementos de la fila inicial, podemos afirmar que el conjunto de índices buscado es aquél en el que alguno de los elementos de $\mathcal{W}_{j,0\bullet}$ o de $\mathcal{W}_{j,L'_j-1\bullet}$ es no nulo. Por tanto, como $W_{j,n} = \langle \mathbf{X}, \mathcal{W}_{j,n\bullet} \rangle$, utilizando la ecuación (3.61) resulta

$$W_{j,0} = \langle \mathbf{X}, \mathcal{W}_{j,0\bullet} \rangle = \sum_{l=0}^{L'_j-1} h_{j,l} X_{2^j-1-l \pmod N}$$

y que

$$W_{j,L'_j-1} = \left\langle \mathbf{X}, \mathcal{W}_{j,L'_j-1} \right\rangle = \sum_{l=0}^{L'_j-1} h_{j,l} X_{2^j L'_j - 1 - l} \pmod N$$

con lo que los índices buscados corresponden a los índices que toma X_t en ambos sumatorios.

Se obtiene que los índices son

$$t = 0, \dots, 2^j L'_j - 1 \quad \text{y} \quad t = N - (L'_j - 2^j), \dots, N - 1$$

es decir, los primeros $2^j L'_j$ elementos de \mathcal{D}_j y los $L'_j - 2^j$ últimos.

Una forma de reducir el impacto de los coeficientes frontera en analizar la serie de $2N$ elementos

$$X_0, \dots, X_{N-1}, X_{N-1}, X_{N-2}, \dots, X_0$$

que resulta ser una estrategia existosa en el contexto del análisis de Fourier porque como bien es sabido, la DFT considera la serie como una porción de tamaño N de una secuencia periódica de período N . Así se eliminan los efectos debidos a la diferencia que pueda haber entre X_0 y X_{N-1} . Nos referiremos a esta técnica, en adelante, mediante “análisis de \mathbf{X} usando condiciones de reflexión de frontera” donde el precio que se paga por su uso es un incremento del coste computacional que, a menudo, es bastante aceptable.

4.3.3. Series con número de elementos que no es potencia de 2.

La transformada DWT completa está diseñada para trabajar con series cuyo número de elementos sea $N = 2^J$ para cierto $J \in \mathbb{N}$. Hemos visto anteriormente que en la DWT parcial de nivel J_0 esta condición se suaviza a que N sea un múltiplo entero de 2^{J_0} . En caso de no tenerse tal circunstancia puede usarse uno de los tres métodos siguientes para obtener una transformada tipo DWT de la serie. Debemos destacar que una alternativa razonable a la DWT que funciona para N general es la MODWT que no resulta ser una transformación ortonormal pero que presenta propiedades similares (ej, proporciona un ANOVA y MRA exactos) y propiedades superiores (ej, su MRA está asociado a filtros de fase cero, hecho que no ocurre en el MRA de la DWT).

El primer método, muy usado en los algoritmos de la FFT, consiste en añadir elementos a \mathbf{X} iguales a \bar{X} hasta que su tamaño alcance el primer múltiplo de 2^{J_0} mayor que N que llamaremos N' . Así las cosas, la nueva serie $\{X'_t\}$ vendrá dada por

$$X'_t = \begin{cases} X_t, & t = 0, \dots, N - 1 \\ \bar{X}, & t = N, \dots, N' - 1 \end{cases}$$

donde se tiene que $\bar{X}' = \bar{X}$ y que

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{X}'}^2 = \frac{1}{N'} \sum_{t=0}^{N'-1} (X'_t - \bar{X})^2 = \frac{1}{N'} \sum_{t=0}^{N-1} (X_t - \bar{X})^2 = \frac{N}{N'} \hat{\sigma}_{\mathbf{X}}^2$$

del que se puede obtener un ANOVA de \mathbf{X} a partir del de \mathbf{X}' utilizando la ecuación (3.66), obteniéndose que

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{X}}^2 = \frac{N'}{N} \left(\frac{1}{N} \sum_{t=0}^{J_0} \|\mathbf{W}'_j\|^2 + \frac{1}{N} \|\mathbf{V}'_{J_0}\|^2 - \bar{X}^2 \right)$$

Respecto al MRA de \mathbf{X} , consideremos que

$$\mathbf{X}' = \sum_{j=1}^{J_0} \mathcal{D}'_j + \mathcal{S}'_{J_0}$$

y que esta descomposición es puntual, por lo que tomando los N primeros elementos de \mathcal{D}'_j y de \mathcal{S}'_{J_0} obtenemos el MRA buscado, pudiéndose escribir como

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{J_0} I_{N,N'} \mathcal{D}'_j + I_{N,N'} \mathcal{S}'_{J_0}$$

donde $I_{N,N'}$ es una matriz de orden $N \times N'$ con los elementos de su diagonal principal igual a 1 y el resto 0.

El segundo método consiste en dividir la serie en porciones de tamaño $2^{J_0} - 1$ y tomando N'' el mayor entero que cumple que $N'' \leq N$ siendo múltiplo de 2^{J_0} , definir

$$\mathbf{X}^{(1)} = [X_0, \dots, X_{N''-1}] \quad \mathbf{X}^{(2)} = [X_{N-N''}, \dots, X_{N-1}]$$

ambas de longitud N'' . Considerando $\mathbf{W}_j^{(l)}$ y $\mathbf{V}_{J_0}^{(l)}$ los subvectores de la DWT de $\mathbf{X}^{(l)}$ podemos combinar los dos análisis

$$\mathbf{X}^{(l)} = \sum_{j=1}^{J_0} \mathcal{D}_j^{(l)} + \mathcal{S}_{J_0}^{(l)}, \quad l = 1, 2$$

para obtener un MRA exacto (no así el ANOVA). La estrategia consiste en mantener las descomposiciones para $X_0, \dots, X_{N''-1}$ dadas por el MRA de $\mathbf{X}^{(1)}$; las de $X_{N''}, \dots, X_{N-1}$, por el MRA de $\mathbf{X}^{(2)}$ y tomar media aritmética para los de $X_{N-N''}, \dots, X_{N''-1}$ dadas por los MRA de $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$.

El tercer método consiste en redefinir la etapa general del algoritmo piramidal para preservar un coeficiente adicional de escala en cada nivel pero que resulta de un método donde los coeficientes escala no están en una única escala.

4.3.4. Elección del nivel J_0 para la DWT parcial.

Igual que en la elección de la wavelet, el nivel parcial J_0 , debe ser tenido en cuenta a partir de la aplicación que se la vaya a dar al análisis. En el caso del ECG, se elige $J_0 = 6$ porque las fluctuaciones de escala superior a $\lambda_6 \Delta t \approx 0.36$ no resultan de interés en el estudio del ritmo cardíaco.

Debe observarse además que la elección de L tiene cierta influencia sobre el nivel J_0 . El nivel por defecto a elegir es tomar J_0 tal que

$$L_{J_0} \leq N < L_{J_0+1}$$

que asegura que, al menos, algunos de los coeficientes de \mathbf{W}_{J_0} y \mathbf{V}_{J_0} no estarán afectados por las condiciones de frontera.

Capítulo 5

Transformada wavelet discreta de máximo solapamiento.

5.1. Descripción cualitativa de la MODWT.

En este capítulo se describe una versión modificada de la DWT denominada transformada wavelet discreta de máximo solapamiento (del inglés MODWT), la cual, basada en la wavelet de Haar, se usa desde los años 70. En la literatura también se conoce como DWT invariante a traslaciones, DWT estacionaria,...

En contraste con la DWT ortonormal parcial, la MODWT de nivel J_0 de una serie temporal es una transformación no ortogonal que proporciona los vectores $\widetilde{W}_1, \dots, \widetilde{W}_{J_0}, \widetilde{V}_{J_0}$ cada uno de dimensión N . El vector \widetilde{W}_j contiene los coeficientes wavelet MODWT asociados a cambios en escala $\tau_j = 2^{j-1}$, mientras que \widetilde{V}_{j_0} los coeficientes escala MODWT asociados a variaciones en escala $\lambda_{J_0} = 2^{J_0}$ y superiores. De manera análoga a la DWT, la MODWT está definida en términos de un algoritmo piramidal computacionalmente eficiente. Las características fundamentales que distinguen la MODWT de la DWT son:

- (1) La DWT parcial de nivel J_0 restringe el tamaño de la serie a un múltiplo entero de 2^{J_0} , sin embargo la MODWT de nivel J_0 es válida cualquiera que sea N . Cuando N es múltiplo de 2^{J_0} , la DWT parcial de nivel J_0 requiere un total de $O(N)$ operaciones para efectuar su cómputo mientras que la MODWT requiere $O(N \log_2 N)$. Hay un precio computacional que debemos pagar por el uso de la MODWT en lugar que la DWT pero el orden total coincide con el del ampliamente usado algoritmo FFT y por tanto es bastante aceptable.
- (2) Análogamente a la DWT, la MODWT sirve para realizar un MRA con la particularidad de que traslaciones en la serie se corresponden con idénticas traslaciones en las componentes suaves y detalles del análisis MRA.

- (3) Las componentes suaves y los detalles de la MODWT, en contraste con los proporcionados por la DWT, están asociados a filtros de fase cero, hecho que permite alinear las características de la serie con los detalles.
- (4) Igual que en la DWT, la MODWT puede ser usada para realizar un análisis de varianza (ANOVA).
- (5) Al contrario que en la DWT, el espectro de potencia empírico de una serie y su versión trasladada coinciden.

5.2. Efecto de las traslaciones circulares en la DWT.

Para ilustrar la invarianza de la MODWT frente a las traslaciones (hecho que no ocurre en la DWT) dibujamos el análisis MRA DWT de la serie

$$X_t = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi t}{16}\right) + \frac{8}{10} & , t = 40, \dots, 45 \\ 0 & , \text{resto} \end{cases}$$

de $N = 128$ elementos y su versión trasladada $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$ con la MODWT de $LA(8)$ en $J_0 = 4$ niveles en la figura 5.1. La energía de las series \mathbf{X} y de $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$ coinciden con el valor $\|\mathbf{X}\|^2$. Aunque podríamos esperar que el MRA de la serie $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$ fuese una traslación del MRA de \mathbf{X} , una comparación de ambas columnas muestra que la traslación ha alterado considerablemente la DWT de la serie y sus detalles. De ésto concluimos que la transformación DWT es sensible a las traslaciones.

Para comprender porqué la traslación afecta a la transformada DWT nos centraremos en los elementos $W_{4,j}$ para $j = 4, 5, 6, 7$ del subvector \mathbf{W}_4 de \mathbf{X} y $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$ que se obtienen mediante producto escalar de la serie \mathbf{X} (respectivamente $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$) con una filas de la matriz W_4 (concretamente con $(W_4)_{j,\bullet}^T$ para $j = 4, 5, 6, 7$).

Los coeficientes de nivel $j = 4$ con la DWT $LA(8)$ surgen de tal producto y se corresponden con diferencias entre dos medias. La primera media es en escala $\tau_4 = 2^3$ y corresponden a la posición del pico central de los vectores básicos, mientras que la diferencia de medias adyacentes corresponden a los valles anterior y posterior de dicho pico central.

Observando la figura 5.2 se deduce que $W_{4,5}$ para la serie \mathbf{X} es grande pues los picos de \mathbf{X} y del vector básico están alineados mientras que los valles están en una porción de \mathbf{X} donde ésta es nula; por otra parte $W_{4,4}$, $W_{4,6}$ y $W_{4,7}$ son pequeñas pues ocurre lo contrario. Obsérvese por ejemplo que en la segunda fila de la misma figura, la traslación de \mathbf{X} , es decir $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$, cambia la naturaleza de $W_{4,j}$.

En conclusión, aunque los coeficientes DWT pueden ser interpretados como diferencias de medias adyacentes, los intervalos sobre los que tales medias se toman están fijados a

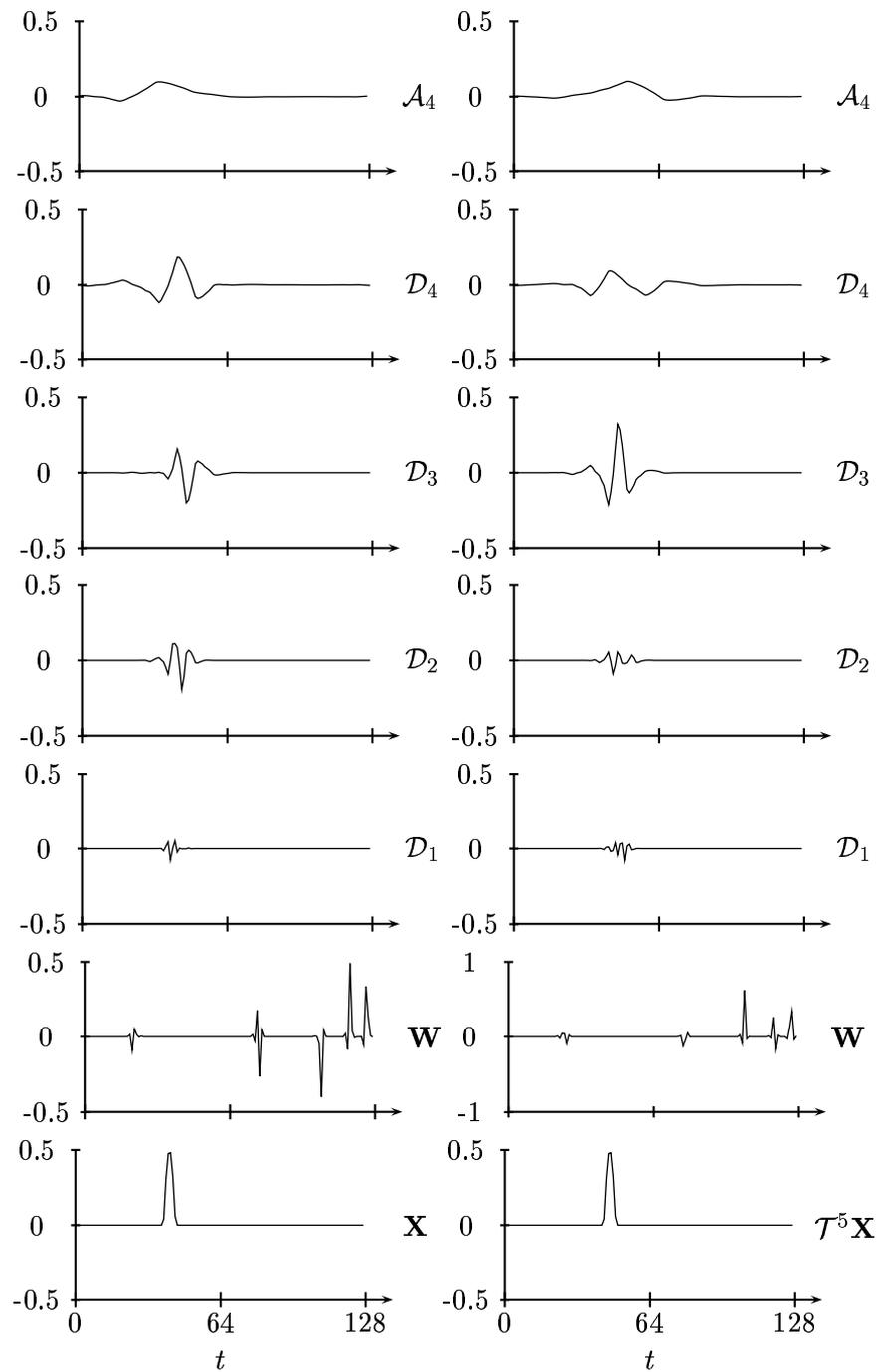


Figura 5.1: Análisis MRA con la DWT $LA(8)$ en $J_0 = 4$ niveles de una señal y su trasladada para ilustrar el efecto en los detalles de la traslación.

priori y por tanto puede que las características de la serie no coincidan con ellos. Un cambio en el punto de inicio de la serie puede producir cambios importantes debido a que la yuxtaposición de dichos intervalos con las características de la serie. Como veremos, la

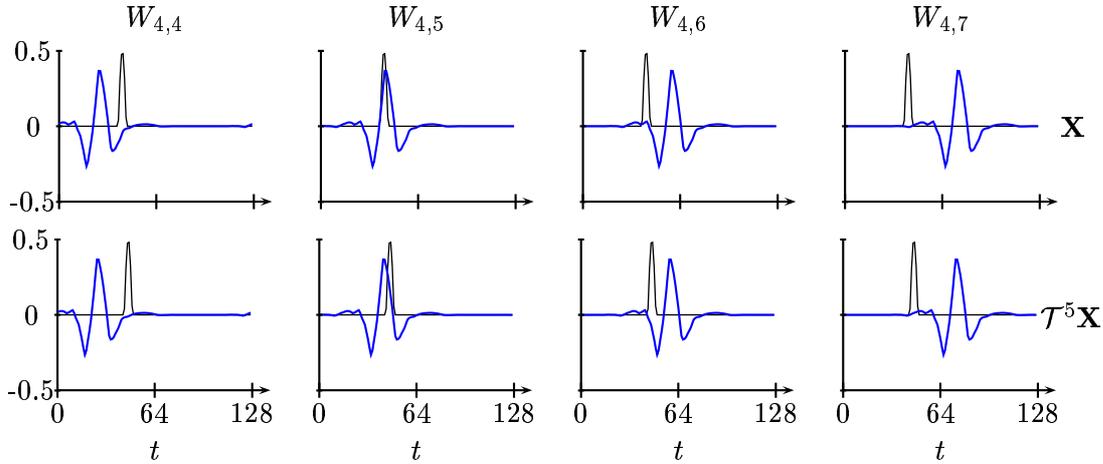


Figura 5.2: Vectores básicos de nivel $J_0 = 4$ usados en la matriz de paso de la transformación DWT de $LA(8)$ para la obtención de los coeficientes $W_{4,j}$, $j = 4, \dots, 7$ respectivamente de izquierda a derecha en ambas filas (líneas azules gruesas). Además, en la primera fila, se pinta la serie \mathbf{X} y en la segunda fila, la serie $\mathcal{T}^5 \mathbf{X}$ (líneas negras finas).

MODWT es un intento de evitar los efectos de la elección del punto de inicio a través de la inclusión de todas las posibles ubicaciones de tales intervalos. La idea es aplicar el algoritmo dos veces, a la serie y a su trasladada para fusionar los resultados en uno. Así se evita el efecto de las traslaciones.

5.3. Filtros wavelet y escala MODWT.

Definiremos los filtros escala y wavelet MODWT, con objeto de hacer conexiones con la DWT, como un rescalado de los filtros wavelet y escala DWT dados por

$$\tilde{h}_l = \frac{h_l}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tilde{g}_l = \frac{g_l}{\sqrt{2}}$$

teniéndose, de las ecuaciones (3.13a), (3.13b) y (3.13c), que

$$\sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l = 0 \quad , \quad \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0$$

para cada $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$.

Si denotamos $\tilde{H}(\cdot)$ y $\tilde{\mathcal{H}}(\cdot)$ a las funciones de transferencia y ganancia cuadrática del filtro $\{\tilde{h}_l\}$, tenemos que

$$\tilde{H}(f) = \frac{H(f)}{\sqrt{2}} \quad , \quad \tilde{\mathcal{H}}(f) = \frac{\mathcal{H}(f)}{\sqrt{2}}$$

y además

$$\tilde{\mathcal{H}}(f) + \tilde{\mathcal{H}}(f + \frac{1}{2}) = 1$$

obteniéndose relaciones análogas para el filtro escala $\{\tilde{g}_l\}$, que conjuntamente proporciona

$$\tilde{\mathcal{H}}(f) + \tilde{\mathcal{G}}(f) = 1$$

Obsérvese que estas modificaciones no afectan a la relación existente entre los filtros escala y wavelet MODWT

$$\tilde{g}_l = (-1)^{l+1} \tilde{h}_{L-1-l} \quad , \quad \tilde{h}_l = (-1)^l \tilde{g}_{L-1-l}$$

Así las cosas podemos escribir

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l X_{t-l} \pmod N \\ \tilde{V}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l X_{t-l} \pmod N \end{aligned}$$

para $t = 0, \dots, N-1$, teniéndose que se obtienen por filtrado circular de \mathbf{X} con los filtros $\{\tilde{H}_l\}$ y $\{\tilde{g}_l\}$ respectivamente.

5.4. Conceptos básicos de la MODWT.

La razón de formular la MODWT es esencialmente definir una transformación que actúe tanto como sea posible como la DWT pero sin las consecuencias de la sensibilidad de ésta a la elección del punto de partida de la serie. Tal sensibilidad es debida íntegramente al “downsampleo” de la salida de los filtrados a la salida de cada etapa del algoritmo piramidal. Para eliminarla debemos, de alguna forma, evitar dicho “downsampleo” preservando la habilidad de obtener un MRA y un ANOVA de la serie.

La idea consiste en aplicar el algoritmo piramidal dos veces, una a \mathbf{X} y otra a $T\mathbf{X}$, para posteriormente fusionar los dos conjuntos de coeficientes DWT en alguna forma concreta.

La primera aplicación del algoritmo proporciona la DWT

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_1 \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{A}_1 \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

Para mostrar las matrices, tomaremos que $N > L$. Del capítulo anterior sabemos que

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} h_1 & h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_2 \\ h_3 & \dots & h_0 & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & \dots & h_5 & h_4 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{bmatrix}$$

siendo \mathcal{A}_1 de la misma estructura pero intercambiando los h_l por g_l .

Las ecuaciones (3.19) y (3.32) proporcionan

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= [\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,1}, \sqrt{2}\widetilde{W}_{1,3}, \dots, \sqrt{2}\widetilde{W}_{1,N-1}]^T \\ \mathbf{V}_1 &= [\sqrt{2}\widetilde{V}_{1,1}, \sqrt{2}\widetilde{V}_{1,3}, \dots, \sqrt{2}\widetilde{V}_{1,N-1}]^T \end{aligned}$$

esto es \mathbf{W}_1 y \mathbf{V}_1 contienen los elementos de índice impar de las secuencias de longitud N dadas por

$$\{\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t}\} \quad , \quad \{\sqrt{2}\widetilde{V}_{1,t}\}$$

que se obtienen de filtrar circularmente \mathbf{X} con los filtros wavelet y escala DWT respectivamente.

La segunda aplicación del algoritmo piramidal consiste en sustituir \mathbf{X} por el vector trasladado circularmente $\mathcal{T}\mathbf{X}$ obteniéndose

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\mathcal{T},1} \\ \mathbf{V}_{\mathcal{T},1} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_1 \mathcal{T} \mathbf{X} = \mathcal{P}_{\mathcal{T},1} \mathbf{X}$$

donde

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T},1} = \mathcal{P}_1 \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{A}_1 \end{bmatrix} \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \mathcal{T} \\ \mathcal{A}_1 \mathcal{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\mathcal{T},1} \\ \mathcal{A}_{\mathcal{T},1} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T},1} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_1 \\ h_2 & h_1 & h_0 & 0 & \dots & 0 & h_{L-1} & \dots & h_4 & h_3 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & h_{L-1} & \dots & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & 0 \end{bmatrix}$$

con $\mathcal{A}_{\mathcal{T},1}$ con similar estructura intercambiando h_l por g_l .

Una comparación entre $\mathcal{B}_1 \mathcal{X}$ y $\mathcal{B}_{\mathcal{T},1} \mathbf{X}$ proporciona que el primero se forma con los índices impares de $\{\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,t}\}$ mientras que el segundo, con los índices pares. Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{\mathcal{T},1} &= [\sqrt{2}\widetilde{W}_{1,0}, \sqrt{2}\widetilde{W}_{1,2}, \dots, \sqrt{2}\widetilde{W}_{1,N-2}]^T \\ \mathbf{V}_{\mathcal{T},1} &= [\sqrt{2}\widetilde{V}_{1,0}, \sqrt{2}\widetilde{V}_{1,2}, \dots, \sqrt{2}\widetilde{V}_{1,N-2}]^T \end{aligned} \tag{5.1}$$

Seguidamente definimos

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}_1 &= [\widetilde{W}_{1,0}, \widetilde{W}_{1,1}, \dots, \widetilde{W}_{1,N-1}]^T \\ \widetilde{\mathbf{V}}_1 &= [\widetilde{V}_{1,0}, \widetilde{V}_{1,1}, \dots, \widetilde{V}_{1,N-1}]^T \end{aligned} \tag{5.2}$$

donde $\widetilde{\mathbf{W}}_1 = \widetilde{\mathcal{B}}_1 \mathbf{X}$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_1 = \widetilde{\mathcal{A}}_1 \mathbf{X}$ siendo

$$\widetilde{\mathcal{B}}_1 = \begin{bmatrix} \widetilde{h}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \widetilde{h}_{L-1} & \dots & \widetilde{h}_2 & \widetilde{h}_1 \\ \widetilde{h}_1 & \widetilde{h}_0 & 0 & \dots & 0 & \widetilde{h}_{L-1} & \dots & \widetilde{h}_4 & \widetilde{h}_3 & \widetilde{h}_2 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{h}_{L-1} & \dots & \widetilde{h}_3 & \widetilde{h}_2 & \widetilde{h}_1 & \widetilde{h}_0 \end{bmatrix}$$

con una estructura similar para $\tilde{\mathcal{A}}_1$ intercambiando los \tilde{h}_l por \tilde{g}_l .

Finalmente la primera etapa del algoritmo piramidal resulta

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mathbf{X} \quad \text{donde} \quad \tilde{\mathcal{P}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{B}}_1 \\ \tilde{\mathcal{A}}_1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Como $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_1^T = I_N$ y $\mathcal{T} \mathcal{T}^T = I_N$ se sigue que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T},1} \mathcal{P}_{\mathcal{T},1}^T = I_N$$

Además

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \|\mathbf{W}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_1\|^2 = \|\mathbf{W}_{\mathcal{T},1}\|^2 + \|\mathbf{V}_{\mathcal{T},1}\|^2$$

y como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_1\|^2 + \|\mathbf{W}_{\mathcal{T},1}\|^2 &= 2\|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 \\ \|\mathbf{V}_1\|^2 + \|\mathbf{V}_{\mathcal{T},1}\|^2 &= 2\|\tilde{\mathbf{V}}_1\|^2 \end{aligned}$$

se sigue que

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 + \|\tilde{\mathbf{V}}_1\|^2 \quad (5.4)$$

por lo que $\|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2$ y $\|\tilde{\mathbf{V}}_1\|^2$ descomponen $\|\mathbf{X}\|^2$, hecho esencial para definir un ANOVA con la MODWT.

Como se tiene que

$$\mathbf{X} = [\mathcal{B}_1^T, \mathcal{A}_1^T] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{V}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = [\mathcal{B}_{\mathcal{T},1}^T, \mathcal{A}_{\mathcal{T},1}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{\mathcal{T},1} \\ \mathbf{V}_{\mathcal{T},1} \end{bmatrix}$$

podemos reconstruir la serie \mathbf{X} tomando medias en ambas expresiones

$$\mathbf{X} = \frac{1}{2} (\mathcal{B}_1^T \mathbf{W}_1 + \mathcal{A}_1^T \mathbf{V}_1 + \mathcal{B}_{\mathcal{T},1}^T \mathbf{W}_{\mathcal{T},1} + \mathcal{A}_{\mathcal{T},1}^T \mathbf{V}_{\mathcal{T},1})$$

Formulando los productos indicados se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{B}_1^T \mathbf{W}_1 + \mathcal{B}_{\mathcal{T},1}^T \mathbf{W}_{\mathcal{T},1}) \\ \tilde{\mathcal{A}}_1^T \tilde{\mathbf{V}}_1 &= \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1^T \mathbf{V}_1 + \mathcal{A}_{\mathcal{T},1}^T \mathbf{V}_{\mathcal{T},1}) \end{aligned}$$

pudiéndose escribir por tanto que

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathcal{B}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_1^T \tilde{\mathbf{V}}_1 = \tilde{\mathcal{D}}_1 + \tilde{\mathcal{S}}_1 \quad (5.5)$$

donde $\tilde{\mathcal{D}}_1$ es el detalle MODWT de nivel 1 y $\tilde{\mathcal{S}}_1$ la correspondiente componente suave, resultando la ecuación anterior el hecho fundamental para definir el MRA MODWT de nivel $J_0 = 1$. Anotar que $\tilde{\mathcal{D}}_1$ y $\tilde{\mathcal{S}}_1$ pueden obtenerse tomando medias de los detalles \mathcal{D}_1 y $\mathcal{D}_{\mathcal{T},1}$ (análogamente la componente suave) correspondientes a las DWT de \mathbf{X} y $\mathcal{T}\mathbf{X}$.

Es importante añadir que mientras que en la DWT se satisface que

$$\|\mathbf{W}_1\|^2 = \|\mathcal{D}_1\|^2$$

en la MODWT no se cumple, pero se tiene que

$$\|\tilde{\mathcal{D}}_1\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|\tilde{\mathbf{W}}_1\|^2 + \mathbf{W}_1^T \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_{T,1}^T \mathbf{W}_{T,1} \right)$$

Obsérvese que implícitamente se está asumiendo que N es par debido a que las ecuaciones (5.1) y (5.2) pero en realidad esta primera etapa del algoritmo piramidal MODWT funciona cualquiera que sea N . Bastaría probar que en tales circunstancias se tiene (5.4) (5.5) y además que

$$\tilde{\mathcal{B}}_1^T \tilde{\mathcal{B}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_1^T \tilde{\mathcal{A}}_1 = I_N$$

De acuerdo a (5.3) podemos escribir (5.5) de la forma

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{B}}_1 \\ \tilde{\mathcal{A}}_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}_1^T \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix}$$

y dado que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_1 \\ \tilde{\mathbf{V}}_1 \end{bmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}_1 \mathbf{X}$$

se sigue que

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathcal{P}}_1^T \tilde{\mathcal{P}}_1 \mathbf{X}$$

donde $\tilde{\mathcal{P}}_1^T$ puede considerarse la inversa de la transformación MODWT dada por $\tilde{\mathcal{P}}_1$. Sin embargo como $\tilde{\mathcal{P}}_1$ es una matriz de orden $2N \times N$ existe una infinidad de formas de recuperar \mathbf{X} a partir de los coeficientes MODWT $\tilde{\mathbf{W}}_1$ $\tilde{\mathbf{V}}_1$ siendo $\tilde{\mathcal{P}}_1^T$ la única inversa generalizada de Moore-Penrose de $\tilde{\mathcal{P}}_1$.

Recordemos que el detalle podía ser considerado como una correlación cruzada del filtro periodizado $\{h_l^o\}$ con una versión “upsampleada” de \mathbf{W}_1 . Aquí mostraremos que el detalle MODWT $\tilde{\mathcal{D}}_1$ puede ser interpretado en términos de una operación de filtrado que involucre a \mathbf{X} y a un filtro de fase cero. Si consideramos $\tilde{\mathcal{D}}_{1,t}$ el t -ésimo elemento de $\tilde{\mathcal{D}}_1$, podemos escribir de la relación

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_1^T \tilde{\mathbf{W}}_1$$

que

$$\tilde{\mathcal{D}}_{1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{W}_{1,t+l} \pmod{N} = \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}_l^o \tilde{W}_{1,t+l} \pmod{N}$$

para $t = 0, \dots, N-1$, donde $\{\tilde{h}_l^o\}$ es es filtro periodizado de longitud N de $\{\tilde{h}_l\}$. Así pues $\tilde{\mathcal{D}}_1$ se obtiene de correlación cruzada circular de $\{\tilde{W}_{1,t}\}$ y $\{\tilde{h}_l^o\}$.

Recordemos que una forma equivalente de esta afirmación es que se obtiene filtrando $\{\widetilde{W}_{1,t}\}$ con un filtro cuya DFT es

$$\{\widetilde{H}^*(\frac{k}{N}) / k = 0, \dots, N-1\}$$

pues $\widetilde{H}(\cdot)$ es la función de transferencia de $\{\widetilde{h}_l\}$. Como $\{\widetilde{W}_{1,t}\}$ se obtuvo filtrando \mathbf{X} con $\{\widetilde{h}_l\}$ se obtiene que el detalle \widetilde{D}_1 puede obtenerse filtrando \mathbf{X} con un filtro que se obtiene de convolucionar $\{\widetilde{h}_l\}$ con un filtro cuya DFT sea la dada anteriormente, obteniéndose que la DFT de este resultado es

$$\widetilde{H}(\frac{k}{N})\widetilde{H}^*(\frac{k}{N}) = |\widetilde{H}(\frac{k}{N})|^2 = \widetilde{\mathcal{H}}(\frac{k}{N})$$

que al ser real no negativa resulta que su filtro asociado tiene fase cero.

Análogamente se define $\widetilde{\mathcal{S}}_1$ mediante el filtrado de \mathbf{X} con un filtro cuya DFT es

$$\widetilde{G}(\frac{k}{N})\widetilde{G}^*(\frac{k}{N}) = |\widetilde{G}(\frac{k}{N})|^2 = \widetilde{\mathcal{G}}(\frac{k}{N})$$

que también tiene fase cero.

5.5. Coeficientes MODWT de nivel j .

Para N arbitrario definimos los coeficientes wavelet y escala MODWT como

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \widetilde{h}_{j,l} X_{t-l} \pmod{N} \\ \widetilde{V}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \widetilde{g}_{j,l} X_{t-l} \pmod{N}\end{aligned}\tag{5.6}$$

para $t = 0, \dots, N-1$ donde

$$\widetilde{h}_{j,l} = \frac{h_{j,l}}{\sqrt{2}} \quad , \quad \widetilde{g}_{j,l} = \frac{g_{j,l}}{\sqrt{2}}$$

son los filtros wavelet y escala MODWT de nivel j .

Las anchuras de los filtros $\{\widetilde{h}_{j,l}\}$ y $\{\widetilde{g}_{j,l}\}$ son las mismas que las de sus homónimos de la DWT pues se trata de versiones reescaladas de éstos, que era

$$L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1$$

Por otra parte debido a las ecuaciones (3.59) (3.63) y a que

$$\widetilde{H}(f) = \frac{H(f)}{\sqrt{2}} \quad , \quad \widetilde{G}(f) = \frac{G(f)}{\sqrt{2}}$$

se obtiene que las funciones de transferencia de $\{\tilde{h}_l\}$ y $\{\tilde{g}_l\}$ son

$$\begin{aligned}\tilde{H}_j(f) &= \tilde{H}(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^l f) \\ \tilde{G}_j(f) &= \prod_{l=0}^{j-1} \tilde{G}(2^l f)\end{aligned}\tag{5.7}$$

Claramente para $j = 1$

$$L - 1 = L, \quad \tilde{G}_1(f) = \tilde{G}(f)$$

y tomaremos además que

$$\tilde{H}_1(f) = \tilde{H}(f), \quad \tilde{h}_{1,l} = \tilde{h}_l, \quad \tilde{g}_{1,l} = \tilde{g}_l$$

Veamos ahora que para N arbitrario y $J_0 \geq 1$, la descomposición presentada satisface que

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|\tilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \|\tilde{\mathbf{V}}_{J_0}\|^2$$

Consideraremos $\{\tilde{h}_{j,l}^o\}$ y $\{\tilde{g}_{j,l}^o\}$ las versiones periodizadas de longitud N de los filtros $\{\tilde{h}_{j,l}\}$ y $\{\tilde{g}_{j,l}\}$ cuyas DFT's vienen dadas por

$$\{\tilde{H}_j(\frac{k}{N})\}, \quad \{\tilde{G}_j(\frac{k}{N})\}$$

Como el filtrado circular de \mathbf{X} con un determinado filtro coincide con el filtrado con su versión periodizada podemos escribir (5.6) como

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}_{j,l}^o X_{t-l} \pmod{N} \\ \tilde{V}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_{j,l}^o X_{t-l} \pmod{N}\end{aligned}\tag{5.8}$$

para $t = 0, \dots, N - 1$. Considerando $\{\mathcal{X}_k\}$ la DFT de $\{X_t\}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\{\tilde{W}_{j,t}\} &\longleftrightarrow \{\tilde{H}_j(\frac{k}{N})\mathcal{X}_k\} \\ \{\tilde{V}_{j,t}\} &\longleftrightarrow \{\tilde{G}_j(\frac{k}{N})\mathcal{X}_k\}\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Parseval a las secuencias anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{W}}_j\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 |\mathcal{X}_k|^2 \\ \|\tilde{\mathbf{V}}_j\|^2 &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 |\mathcal{X}_k|^2\end{aligned}$$

de donde sumando

$$\|\widetilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{V}}_j\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(|\widetilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 + |\widetilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 \right) |\mathcal{X}_k|^2$$

Para $j \geq 2$, usando las relaciones de (5.7), se tiene que

$$\begin{aligned} |\widetilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 + |\widetilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 &= |\widetilde{H}(2^{j-1}f)|^2 \prod_{l=0}^{j-2} |\widetilde{G}(2^l f)|^2 + \prod_{l=0}^{j-1} |\widetilde{G}(2^l f)|^2 = \\ &= \prod_{l=0}^{j-2} |\widetilde{G}(2^l \frac{k}{N})|^2 \left(|\widetilde{H}(2^{j-1} \frac{k}{N})|^2 + |\widetilde{G}(2^{j-1} \frac{k}{N})|^2 \right) = \\ &= |\widetilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2 \left(|\widetilde{H}(2^{j-1} \frac{k}{N})|^2 + |\widetilde{G}(2^{j-1} \frac{k}{N})|^2 \right) = \\ &= |\widetilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2 \end{aligned}$$

pues $\widetilde{H}(f) + \widetilde{G}(f) = 1$, $\forall f$.

Por consiguiente

$$\|\widetilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{V}}_j\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\widetilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2 |\mathcal{X}_k|^2 = \|\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}\|^2$$

Por inducción se sigue que

$$\|\widetilde{\mathbf{V}}_1\|^2 = \sum_{j=2}^{J_0} \|\widetilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}\|^2$$

para cualquier $J_0 \geq 2$.

Teniendo en cuenta que

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \|\widetilde{\mathbf{W}}_1\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{V}}_1\|^2$$

(hecho que se prueba con un argumento paralelo al usado anteriormente), obtenemos finalmente que

$$\|\mathbf{X}\|^2 = \sum_{j=1}^{J_0} \|\widetilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \|\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}\|^2 \quad (5.9)$$

que es la descomposición de energía que buscábamos, hecho esencial para realizar una ANOVA con la MODWT. Respecto al ANOVA, recordemos que

$$\tilde{\sigma}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \|\mathbf{X}\|^2 - \overline{X}^2$$

por lo que de la relación (5.9) se tiene que

$$\tilde{\sigma}_{\mathbf{X}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{J_0} \|\widetilde{\mathbf{W}}_j\|^2 + \frac{1}{N} \|\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}\|^2 - \overline{X}^2$$

pero dado que la media de $\tilde{\mathbf{V}}_{J_0}$ coincide con \bar{X} se sigue que

$$\frac{1}{N} \|\tilde{\mathbf{V}}_{J_0}\|^2 - \bar{X}^2$$

es la varianza de $\tilde{\mathbf{V}}_{J_0}$.

El objetivo ahora es definir el MRA MODWT. Escribimos

$$\tilde{\mathbf{W}}_j = \tilde{\mathcal{W}}_j \mathbf{X}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_j = \tilde{\mathcal{V}}_j \mathbf{X}$$

que a la vista de (5.8) resulta

$$\tilde{\mathcal{W}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{h}_{j,0}^o & \tilde{h}_{j,N-1}^o & \tilde{h}_{j,N-2}^o & \cdots & \tilde{h}_{j,2}^o & \tilde{h}_{j,1}^o \\ \tilde{h}_{j,1}^o & \tilde{h}_{j,0}^o & \tilde{h}_{j,N-1}^o & \cdots & \tilde{h}_{j,3}^o & \tilde{h}_{j,2}^o \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{h}_{j,N-1}^o & \tilde{h}_{j,N-2}^o & \tilde{h}_{j,N-3}^o & \cdots & \tilde{h}_{j,1}^o & \tilde{h}_{j,0}^o \end{bmatrix}$$

siendo $\tilde{\mathcal{V}}_j$ análoga pero reemplazando $\tilde{h}_{j,k}^o$ por $\tilde{h}_{j,k}^k$.

Definimos

$$\tilde{\mathcal{D}}_j = \tilde{\mathcal{W}}_j \tilde{\mathbf{W}}_j, \quad \tilde{\mathcal{S}}_j = \tilde{\mathcal{V}}_j \tilde{\mathbf{V}}_j$$

por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_j &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}_{j,l}^o \tilde{\mathcal{W}}_{j,t+l} \pmod{N} \\ \tilde{\mathcal{S}}_j &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_{j,l}^o \tilde{\mathcal{V}}_{j,t+l} \pmod{N} \end{aligned} \tag{5.10}$$

para $t = 0, \dots, N - 1$.

Con una línea de razonamiento análoga a la realizada anteriormente para la obtención de la descomposición de energía se tiene que

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{D}}_{j,t}\} &\longleftrightarrow \{|\tilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 \mathcal{X}_k\} \\ \{\tilde{\mathcal{S}}_{j,t}\} &\longleftrightarrow \{|\tilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 \mathcal{X}_k\} \end{aligned}$$

por lo que

$$\{\tilde{\mathcal{D}}_{j,t} + \tilde{\mathcal{S}}_{j,t}\} \longleftrightarrow \left\{ \left(|\tilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 + |\tilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 \right) \mathcal{X}_k \right\}$$

pero como para $j \geq 2$

$$|\tilde{H}_j(\frac{k}{N})|^2 + |\tilde{G}_j(\frac{k}{N})|^2 = |\tilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2$$

además de que

$$\{\tilde{\mathcal{S}}_{j-1,t}\} \longleftrightarrow \{|\tilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2 \mathcal{X}_k\}$$

se sigue que

$$\{\tilde{\mathcal{D}}_{j,t} + \tilde{\mathcal{S}}_{j,t}\} \longleftrightarrow \{|\tilde{G}_{j-1}(\frac{k}{N})|^2 \mathcal{X}_k\}$$

teniéndose que

$$\tilde{\mathcal{S}}_{j-1,t} = \tilde{\mathcal{D}}_{j,t} + \tilde{\mathcal{S}}_{j,t}$$

para $t = 0, \dots, N - 1$, por lo que

$$\tilde{\mathcal{S}}_{j-1} = \tilde{\mathcal{D}}_j + \tilde{\mathcal{S}}_j$$

Otra vez por inducción se muestra que

$$\tilde{\mathcal{S}}_1 = \sum_{j=2}^{J_0} \tilde{\mathcal{D}}_j + \tilde{\mathcal{S}}_{J_0}$$

para cualquier $J_0 \geq 2$. Por último reiterando el razonamiento se llega a que

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathcal{D}}_1 + \tilde{\mathcal{S}}_1$$

que en conjunción con lo anterior

$$\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{J_0} \tilde{\mathcal{D}}_j + \tilde{\mathcal{S}}_{J_0}$$

que resulta ser el análisis MRA MODWT buscado.

5.6. Algoritmo piramidal MODWT.

Aunque en principio puede parecer que el cómputo de la invarianza de traslaciones de la DWT pueda requerir $O(N^2)$ operaciones, si se tiene en cuenta que la DWT de $\mathcal{T}^m \mathbf{X}$ tiene coeficientes iguales en escalas concretas se tiene una reducción del orden hasta $O(N \log_2 N)$.

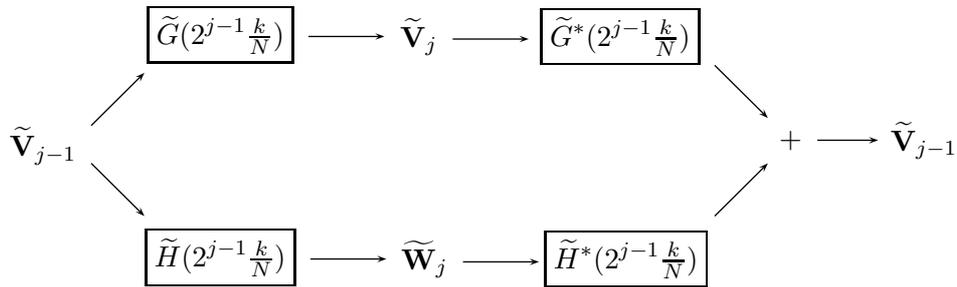
El objetivo es definir el algoritmo piramidal MODWT para el cómputo de los coeficientes wavelet y escala MODWT de nivel j a partir de los coeficientes escala de nivel $j - 1$. La clave está en la relación existente en los filtros usados para el cómputo de los coeficientes de niveles $j - 1$ y j .

De las ecuaciones (5.7), sabemos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j(f) &= \tilde{G}_{j-1}\left(\frac{k}{N}\right) \tilde{H}(2^{j-1}f) \\ \tilde{G}_j(f) &= \tilde{G}_{j-1}\left(\frac{k}{N}\right) \tilde{G}(2^{j-1}f) \end{aligned}$$

La parte de la derecha de las relaciones anteriores representa cascada de dos filtros circulares donde, en ambos, el primero consiste en un filtro circular que aplicado a \mathbf{X} y proporciona $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$, mientras que el segundo es aquél que aplicado a $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ proporciona $\tilde{\mathbf{W}}_j$ y $\tilde{\mathbf{V}}_j$ respectivamente. Así pues podemos obtener $\tilde{\mathbf{W}}_j$ y $\tilde{\mathbf{V}}_j$ filtrando $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ a través de los filtros cuyas funciones de transferencia son, respectivamente,

$$\{\tilde{H}(2^{j-1} \frac{k}{N})\}, \{\tilde{G}(2^{j-1} \frac{k}{N})\}$$



Cuadro 5.1: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ en $\tilde{\mathbf{W}}_j$ y $\tilde{\mathbf{V}}_j$ y la síntesis de éstos en $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$

Con un razonamiento análogo al realizado en la DWT se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{W}}_{j,t} &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{h}_l^o \tilde{\mathbf{V}}_{j-1,t-2^{j-1}l \pmod N} \\ \tilde{\mathbf{V}}_{j,t} &= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{g}_l^o \tilde{\mathbf{V}}_{j-1,t-2^{j-1}l \pmod N} \end{aligned} \tag{5.11}$$

para $t = 0, \dots, N - 1$ que constituyen el algoritmo piramidal MODWT. Obsérvese que definiendo $\tilde{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{X}$ se tiene la primera etapa.

En cuanto a la reconstrucción de $\tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ a partir de $\tilde{\mathbf{W}}_j$ y $\tilde{\mathbf{V}}_j$, el algoritmo piramidal para el cómputo de la inversa MODWT viene dado por

$$\tilde{\mathbf{V}}_{j-1,t} = \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{h}_l \tilde{\mathbf{W}}_{j,t+2^{j-1}l \pmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{g}_l \tilde{\mathbf{V}}_{j,t+2^{j-1}l \pmod N}$$

para $t = 0, \dots, N - 1$.

La figura 5.1 muestra un diagrama de flujo sintetizando las operaciones realizadas en ambos casos.

En una línea de razonamiento similar a la realizada en la DWT se tiene la expresión de la j -ésima etapa del algoritmo piramidal MODWT en términos de las matrices $\tilde{\mathcal{B}}_j$ y $\tilde{\mathcal{A}}_j$

$$\tilde{\mathbf{W}}_j = \tilde{\mathcal{B}}_j \tilde{\mathbf{V}}_{j-1}, \quad \tilde{\mathbf{V}}_j = \tilde{\mathcal{A}}_j \tilde{\mathbf{V}}_{j-1}$$

así como la síntesis

$$\tilde{\mathbf{V}}_{j-1} = \tilde{\mathcal{B}}_j^T \tilde{\mathbf{W}}_j + \tilde{\mathcal{A}}_j^T \tilde{\mathbf{V}}_j$$

Con la adopción de $\tilde{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{X}$ y una aplicación recursiva de lo anterior resulta

$$\mathbf{X} = \tilde{\mathcal{B}}_1 \tilde{\mathbf{W}}_1 + \tilde{\mathcal{A}}_1 \tilde{\mathcal{B}}_2 \tilde{\mathbf{W}}_2 + \dots + \tilde{\mathcal{A}}_1 \dots \tilde{\mathcal{A}}_{J_0-1} \tilde{\mathcal{B}}_{J_0} \tilde{\mathbf{W}}_{J_0} + \tilde{\mathcal{A}}_1 \dots \tilde{\mathcal{A}}_{J_0} \tilde{\mathbf{V}}_{J_0}$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{D}}_j &= \tilde{\mathcal{A}}_1 \dots \tilde{\mathcal{A}}_{j-1} \tilde{\mathcal{B}}_j \tilde{\mathbf{W}}_j \\ \tilde{\mathcal{S}}_{J_0} &= \tilde{\mathcal{A}}_1 \dots \tilde{\mathcal{A}}_{J_0} \tilde{\mathbf{V}}_{J_0} \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, J_0$ siendo

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j = \widetilde{\mathcal{B}}_j \widetilde{\mathcal{A}}_{j-1} \dots \widetilde{\mathcal{A}}_1, \quad \widetilde{\mathbf{V}}_j = \widetilde{\mathcal{A}}_j \widetilde{\mathcal{A}}_{j-1} \dots \widetilde{\mathcal{A}}_1$$

Lo último que se expondrá es un pseudo-código del algoritmo para el cálculo de la MODWT y su inversa de una serie \mathbf{X} , utilizando las ecuaciones (5.11) en $O(N)$ iteraciones y la modificación a realizar para que el mismo algoritmo compute $\widetilde{\mathcal{D}}_j$ y $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_0}$.

Dado el vector $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ se obtiene $\widetilde{\mathbf{W}}_j$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_j$ mediante el algoritmo siguiente.

Algoritmo 5.6.1 (Algoritmo de análisis)

Para $t = 0, \dots, N - 1$, hacer

$k = t$

$$\widetilde{W}_{j,t} = \widetilde{h}_0 \widetilde{V}_{j-1,k}$$

$$\widetilde{V}_{j,t} = \widetilde{g}_0 \widetilde{V}_{j-1,k}$$

Para $n = 0, \dots, L - 1$, hacer

$$k = k - 2^{j-1}$$

Si $k < 0$ entonces $k = k \bmod N$

$$\widetilde{W}_{j,t} = \widetilde{W}_{j,t} + \widetilde{h}_n \widetilde{V}_{j-1,k}$$

$$\widetilde{V}_{j,t} = \widetilde{V}_{j,t} + \widetilde{g}_n \widetilde{V}_{j-1,k}$$

Obsérvese que si j es tal que $2^{j-1} \leq N$ (como ocurrirá en las aplicaciones prácticas) podemos reemplazar $k \bmod N$ por $k + N$.

Utilizando el algoritmo anterior para $j = 1$ (e.d. $\widetilde{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{X}$) y posteriormente para $j = 2, \dots, J_0$ obtenemos los coeficientes MODWT en los subvectores $\widetilde{\mathbf{W}}_1, \dots, \widetilde{\mathbf{W}}_{J_0}$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}$.

Dado los vectores $\widetilde{\mathbf{W}}_j$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_j$ se obtiene $\widetilde{\mathbf{V}}_{j-1}$ con el algoritmo que sigue.

Algoritmo 5.6.2 (Algoritmo de síntesis)

Para $t = 0, \dots, N - 1$, hacer

$k = t$

$$\widetilde{V}_{j-1,t} = \widetilde{h}_0 \widetilde{W}_{j,k} + \widetilde{g}_0 \widetilde{V}_{j,k}$$

Para $n = 0, \dots, L - 1$, hacer

$$k = k + 2^{j-1}$$

Si $k \geq N$ entonces $k = k \bmod N$

$$\widetilde{V}_{j-1,t} = \widetilde{V}_{j-1,t} + \widetilde{h}_n \widetilde{W}_{j,k} + \widetilde{g}_n \widetilde{V}_{j,k}$$

Obsérvese, de nuevo, que si j es tal que $2^{j-1} \leq N$ (como ocurrirá en las aplicaciones prácticas) podemos reemplazar $k \bmod N$ por $k - N$.

Utilizando el algoritmo anterior, si empezamos con $\widetilde{\mathbf{W}}_{J_0}$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}$ obtenemos $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-1}$ que lo representamos por

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0} \longrightarrow \boxed{\phantom{\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-1}}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-1}$$

$$\uparrow$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{J_0}$$

$$\begin{array}{ll}
\tilde{h}_l = \frac{h_l}{\sqrt{2}} & \tilde{g}_l = \frac{g_l}{\sqrt{2}} \\
\{\tilde{h}_l\} \longleftrightarrow \tilde{H}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(\cdot) & \{\tilde{g}_l\} \longleftrightarrow \tilde{G}(\cdot) = \frac{1}{\sqrt{2}}G(\cdot) \\
\tilde{h}_l = (-1)^l \tilde{g}_{L-1-l} & \tilde{g}_l = (-1)^{l+1} \tilde{h}_{L-1-l} \\
\tilde{H}(f) = -e^{-i2\pi f(L-1)} \tilde{G}(\frac{1}{2} - f) & \tilde{G}(f) = e^{-i2\pi f(L-1)} \tilde{H}(\frac{1}{2} - f) \\
\sum_l \tilde{h}_l = \tilde{H}(0) = 0 & \sum_l \tilde{g}_l = \tilde{G}(0) = 1 \\
\sum_l \tilde{h}_l^2 = \frac{1}{2} & \sum_l \tilde{g}_l^2 = \frac{1}{2} \\
\sum_l \tilde{h}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0, n \neq 0 & \sum_l \tilde{g}_l \tilde{g}_{l+2n} = 0, n \neq 0 \\
\sum_l \tilde{g}_l \tilde{h}_{l+2n} = 0 \\
\tilde{\mathcal{H}}(f) = |\tilde{H}(f)|^2 = \frac{1}{2}\mathcal{H}(f) & \tilde{\mathcal{G}}(f) = |\tilde{G}(f)|^2 = \frac{1}{2}\mathcal{G}(f) \\
\tilde{\mathcal{H}}(f) + \tilde{\mathcal{H}}(f + \frac{1}{2}) = 2 & \tilde{\mathcal{G}}(f) + \tilde{\mathcal{G}}(f + \frac{1}{2}) = 2 \\
\tilde{\mathcal{H}}(f) + \tilde{\mathcal{G}}(f) = 2 \\
\tilde{W}_{1,t} = \sum_l \tilde{h}_l X_{t-l \bmod N} & \tilde{V}_{1,t} = \sum_l \tilde{g}_l X_{t-l \bmod N} \\
\tilde{W}_{j,t} = \sum_l \tilde{h}_l \tilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N} & \tilde{V}_{j,t} = \sum_l \tilde{g}_l \tilde{V}_{j-1,t-2^{j-1}l \bmod N} \\
\tilde{h}_{1,l} = \tilde{h}_l, \tilde{H}_1(f) = \tilde{H}(f) & \tilde{g}_{1,l} = \tilde{g}_l, \tilde{G}_1(f) = \tilde{G}(f) \\
\tilde{H}_j(f) = \tilde{H}(2^{j-1}f) \prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^l f) & \tilde{G}_j(f) = \prod_{l=0}^{j-2} \tilde{G}(2^l f) \\
\tilde{H}_j(f) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} H_j(f) & \tilde{G}_j(f) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} G_j(f) \\
\tilde{H}_j(f) = \tilde{H}(2^{j-1}f) \tilde{G}_{j-1}(f) & \tilde{G}_j(f) = \tilde{G}(2^{j-1}f) \tilde{G}_{j-1}(f) \\
\{\tilde{h}_{j,l}\} \longleftrightarrow \tilde{H}_j(\cdot) & \{\tilde{g}_{j,l}\} \longleftrightarrow \tilde{G}_j(\cdot) \\
\sum_l \tilde{h}_{j,l} = \tilde{H}_j(0) = 0 & \sum_l \tilde{g}_{j,l} = \tilde{G}_j(0) = 1 \\
\sum_l \tilde{h}_{j,l}^2 = \frac{1}{2^j} & \sum_l \tilde{g}_{j,l}^2 = \frac{1}{2^j} \\
\sum_l \tilde{h}_{j,l} \tilde{h}_{j,l+2^j n} = 0, n \neq 0 & \sum_l \tilde{g}_{j,l} \tilde{g}_{j,l+2^j n} = 0, n \neq 0 \\
\sum_l \tilde{g}_{j,l} \tilde{h}_{j,l+2^j n} = 0 \\
\tilde{\mathcal{H}}_j(f) = |\tilde{H}_j(f)|^2 = \frac{1}{2^j} \mathcal{H}_j(f) & \tilde{\mathcal{G}}_j(f) = |\tilde{G}_j(f)|^2 = \frac{1}{2^j} \mathcal{G}_j(f) \\
\tilde{W}_{j,t} = \sum_l \tilde{h}_{j,l} X_{t-l \bmod N} & \tilde{V}_{j,t} = \sum_l \tilde{g}_{j,l} X_{t-l \bmod N}
\end{array}$$

Cuadro 5.2: Relaciones fundamentales acerca de los filtros wavelet y de escala MODWT. Los convenios adoptados en la tabla 3.6 también son de aplicación aquí.

Aplicando de nuevo el algoritmo con $\widetilde{\mathbf{W}}_{J_0-1}$ y $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-1}$ se obtiene $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-2}$

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-2}$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{J_0} \qquad \widetilde{\mathbf{W}}_{J_0-1}$$

Si seguimos aplicando el algoritmo J_0-2 iteraciones más obtenemos $\widetilde{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{X}$, observándose que se obtienen $\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0-3}, \dots, \widetilde{\mathbf{V}}_1$ como cálculos intermedios

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{V}}_0 = \mathbf{X}$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_{J_0} \qquad \widetilde{\mathbf{W}}_{J_0-1} \qquad \qquad \qquad \widetilde{\mathbf{W}}_1$$

El detalle de orden j , $\widetilde{\mathcal{D}}_j$, se obtiene tomando la inversa MODWT de los vectores $\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{j-1}, \widetilde{\mathbf{W}}_j, \mathbf{0}_j$ donde $\mathbf{0}_k$ representa un vector de N ceros para $k = 1, \dots, j$. Podemos esquematizarlo de la forma

$$\mathbf{0}_j \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}}_j$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow$$

$$\widetilde{\mathbf{W}}_j \qquad \mathbf{0}_{j-1} \qquad \qquad \qquad \mathbf{0}_1$$

Análogamente puede obtenerse la componente suave $\widetilde{\mathcal{S}}_{J_0}$ aplicando la inversa MODWT a los vectores $\mathbf{0}_1, \dots, \mathbf{0}_{J_0}, \widetilde{\mathbf{V}}_{J_0}$, esto es

$$\widetilde{\mathbf{V}}_{J_0} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\phantom{\mathbf{V}}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}_{J_0}$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \qquad \uparrow$$

$$\mathbf{0}_{J_0} \qquad \mathbf{0}_{J_0-1} \qquad \qquad \qquad \mathbf{0}_1$$

5.7. Ejemplos reales.

5.7.1. Electrocardiograma (ECG).

Aquí volvemos a analizar la serie ECG usando la MODWT de $LA(8)$ de manera que se puedan comparar los resultados con los obtenidos en el análisis con la DWT de $LA(8)$ ambos para $J_0 = 6$. Las figuras que se deben comparar son la figura 4.18 y la figura 5.3. La similitud entre ambas es bastante notable pero es en los detalles $\mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4$ y \mathcal{D}_5 y sus correspondientes $\widetilde{\mathcal{D}}_3, \widetilde{\mathcal{D}}_4$ y $\widetilde{\mathcal{D}}_5$ donde se observan las diferencias. En particular, los detalles MODWT son más consistentes a lo largo del tiempo, indicando que las variaciones en el tiempo de los detalles DWT son en parte atribuibles al alineamiento particular asumido por la DWT. Además, el detalle MODWT $\widetilde{\mathcal{D}}_6$ no tiende a aumentar y disminuir tanto como lo hace el detalle DWT \mathcal{D}_6 , hecho otra vez atribuible indudablemente a los efectos de alineamiento en la DWT. Por otra parte, la apariencia asimétrica de las “abolladuras”

características de \mathcal{D}_6 quedan eliminadas en los detalles $\tilde{\mathcal{D}}_6$ debido a la propiedad de fase cero del filtro que proporciona dichos detalles. Omitimos la ilustración de las aproximaciones de distintos órdenes pues, aunque proporciona ciertas diferencias con los de la DWT, éstas son menos apreciables que en la comparación de los detalles DWT y MODWT.

5.7.2. Fluctuaciones subtidiales del nivel del mar (SSLF).

En esta sección analizamos, mediante MRA basado en la MODWT de $LA(8)$, una serie temporal de los niveles subtidiales del mar en “Crescent City” localizada en la costa norte de California. Dentro del puerto se mantiene un medidor de marea por el Servicio Nacional de Océanos (NOS) que toma una medición cada 6 minutos la cual es procesada por un filtro de paso alto para eliminar las componentes debidas al viento. Mediciones periódicas de nivel garantizan que tales mediciones permanecen constantes respecto al nivel de referencia en la tierra que rodea al medidor. La serie temporal considerada está basada en un segmento que va desde 1980 hasta 1991 faltando un pedazo de aproximadamente 2 semanas a lo largo del verano de 1990 además de algunos trozos de periodo inferior que fueron rellenados mediante predicciones de las mareas (y medias locales). La serie resultante se utilizó para construir una nueva serie tomando uno de cada diez valores obteniéndose así un muestreo de un valor por hora y se le aplicó un filtro de paso bajo para eliminar las componentes de las mareas diurnas (una vez al día) y semidiurnas (dos veces al día). Finalmente se tomó un valor cada medio día obteniéndose una serie con $\Delta t = \frac{1}{2}$ día y un total de $N = 8476$ muestras. Dicha serie se pinta en la figura 5.4 en la parte inferior.

Para el análisis utilizaremos la MODWT con la wavelet $LA(8)$ en un total de $J_0 = 7$ etapas; la elección de la wavelet se debe a la influencia mínima que aportan la forma de los filtros al análisis de los datos y el número de etapas se debe a que las variaciones intra-anales se rompen para un número de etapas mayor ($\lambda_{J_0} \Delta t \leq 32$) mientras que para un número menor, se añaden componentes dependientes de las estacionales a la aproximación $\tilde{\mathcal{S}}_{J_0}$ ($\lambda_{J_0} \Delta t \geq 128$) y que es preferible estudiar por separado.

En la parte superior de la misma figura, se encuentra la aproximación de nivel 7 que corresponde medias en una escala física de $\lambda_7 \Delta t = 64$ días mientras que las 7 gráficas inferiores corresponden a los detalles MODWT $\tilde{\mathcal{D}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{D}}_7$ correspondientes respectivamente a escalas de $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots, 32$ días. Las líneas verticales delimitan los coeficientes de frontera que en este caso resultan poco afectados pues la asunción de que la serie que tratamos es periódica es razonable aquí ya que observamos un fenómeno con una componente periódica anual y disponemos de una cantidad de datos que cubren 12 años enteros.

Como ya sabemos,

$$\mathbf{X} = \sum_j \tilde{\mathcal{D}}_j + \tilde{\mathcal{S}}_7$$

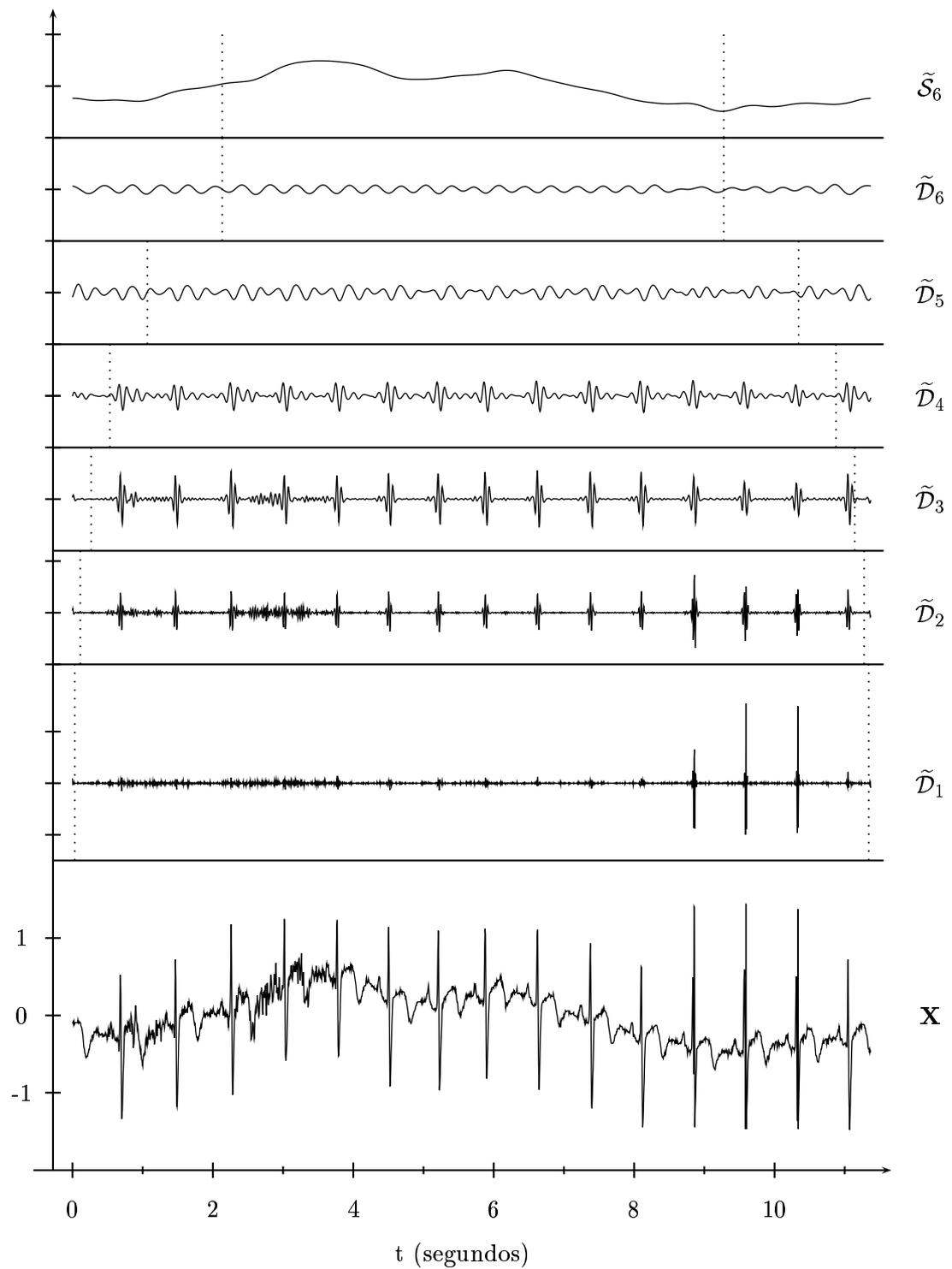


Figura 5.3: Análisis multirresolución (MRA) con la MODWT $LA(8)$ para la serie ECG. Esta figura debe ser comparada con la figura 4.18.

siendo los detalles y aproximaciones la salida de un filtro de fase cero con lo cual los eventos están alineados en el tiempo con la serie de los datos. Esta propiedad es importante si lo que queremos es relacionar eventos en los detalles con eventos en la serie o si queremos entender las relaciones temporales entre eventos a diferentes escalas.

5.7.3. Nivel mínimo del Nilo (NRM).

Esta serie consiste en mediciones (en metros) del nivel mínimo anual de agua del río Nilo a lo largo de los años 622 hasta 1284 constituyendo la porción de mayor tamaño, de un total de $N = 663$ observaciones, sin interrupciones de un registro histórico del nivel mínimo del Nilo generado a partir de diferentes fuentes de datos por el Príncipe Omar Toussoun que se extiende hasta 1921 pero con algunos gaps.

Esta serie de datos ha desempeñado un importante papel pues fue ésta y otras series las que utilizó Hurst (1951) en un estudio que probaba la poca eficacia de los métodos tradicionales estadísticos en mostrar la persistencia a largo tiempo (long term persistence). Más tarde, Mandelbrot and Wallis (1968) propusieron modelizar las series del trabajo de Hurst como “Ruido Gaussiano fraccionario”. Este modelo es el primero en hacer un intento de caracterizar lo que hoy conocemos como *procesos estacionarios de larga memoria*. En 1994, Beran usa esta serie como un ejemplo de su trabajo pionero en estadística acerca de tales procesos. Más recientemente, Eltahir y Wang (1999) estudian esta serie como un indicador de la frecuencia histórica del fenómeno *El Niño*.

En la figura 5.5, se muestra un MRA con la MODWT de Haar de nivel $J_0 = 4$ no habiéndose empleado wavelets de anchuras mayores pues proporciona análisis muy similares y de esta forma se minimiza el número de coeficientes frontera afectados en la transformación. Hemos elegido $J_0 = 4$ porque estamos interesados en mostrar ciertas dependencias temporales a lo largo de las escalas τ_1 y τ_2 contrastando con la falta de esta dependencia en escalas mayores. Como los datos fueron recogidos anualmente (e.d. $\Delta t = 1$ año.) entonces los detalles $\tilde{\mathcal{D}}_1, \dots, \tilde{\mathcal{D}}_4$ están asociados a cambios en medias sobre escalas físicas de 1, 2, 4 y 8 años respectivamente mientras que $\tilde{\mathcal{S}}_4$ sobre cambios en escalas mayores a 16 años.

El aspecto más interesante del MRA es la aparente heterogeneidad de la varianza en los detalles $\tilde{\mathcal{D}}_1$ y $\tilde{\mathcal{D}}_2$ que visualmente se tiene en la gran variabilidad presentan estos dos detalles hasta principios de los años 700 no observándose tal comportamiento en los detalles de escalas superiores $\tilde{\mathcal{D}}_3$ y $\tilde{\mathcal{D}}_4$. Un examen del trabajo de Toussoun por parte de Popper (1951) y Balek (1977) indica la construcción en 715 de un ‘nilómetro’ en la isla de Roda con el que se mide a partir de esta fecha en adelante. Las fuentes de las mediciones entre 622 y 714 son desconocidas pero fueron hechas en diferentes localizaciones cerca de El Cairo con posiblemente diferentes aparatos de medida de menor precisión que el ‘nilómetro’ de

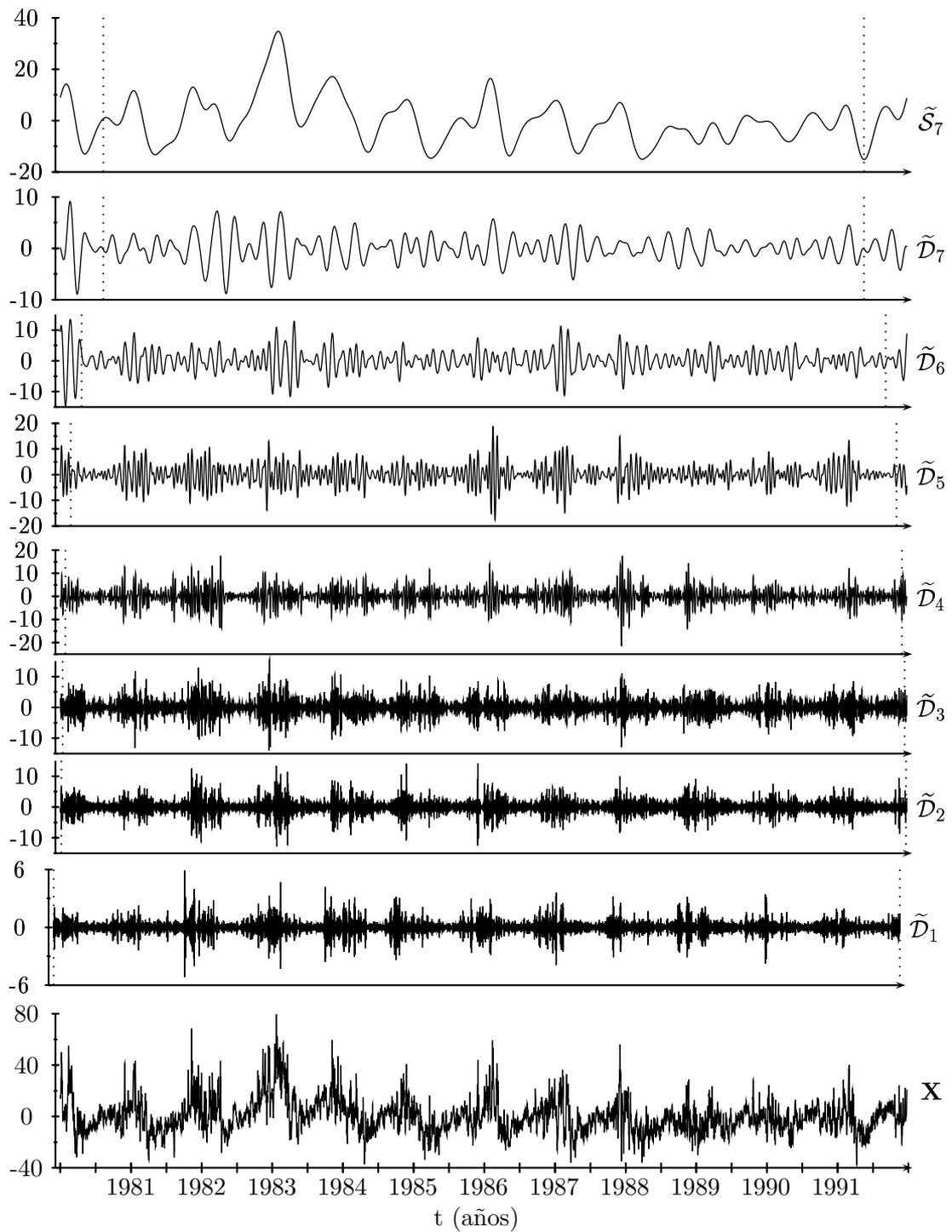


Figura 5.4: Análisis multirresolución (MRA) con la MODWT $LA(8)$ para la serie SSLF. Las líneas discontinuas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

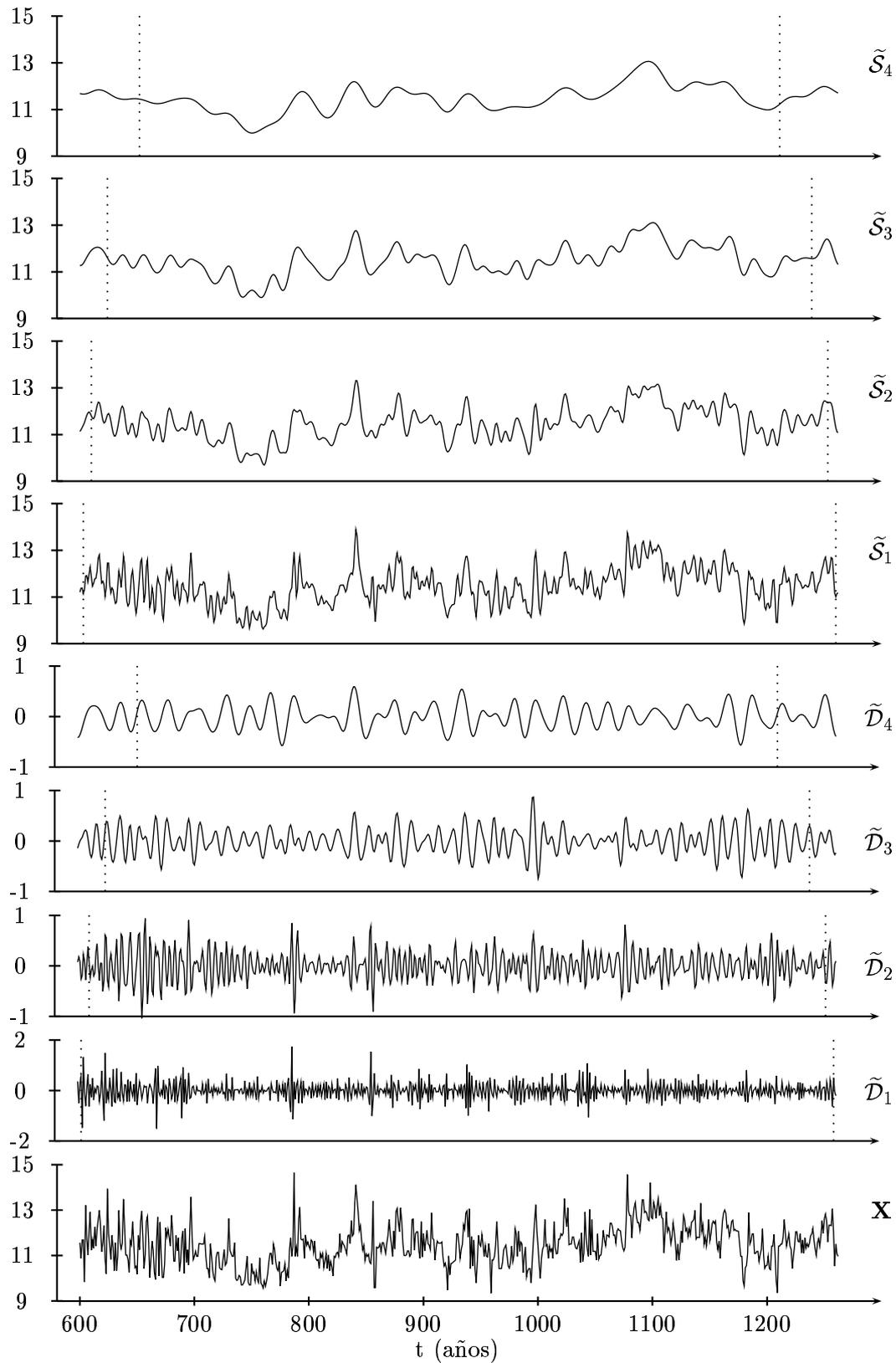


Figura 5.5: Análisis multirresolución (MRA) y aproximaciones con la MODWT de Haar para la serie NRM. Las líneas discontinúas indican los coeficientes afectados por la circularidad (coeficientes de frontera).

Roda. Es razonable pensar, por tanto, que este nuevo instrumento de medida de la isla de Roda conduce a una reducción de la variabilidad en las escalas menores.

Apéndice A

Rutinas de MATLAB.

En este apéndice incluiremos las rutinas del programa de cálculo simbólico MATLAB[®] 7 R14 de la compañía *The MathWorks*[®] para UNIX empleadas para la elaboración de la Fase Investigadora de esta memoria. Se introducirán las rutinas en el orden que aparecen utilizadas en la memoria haciendo un breve comentario del uso que se hace de ellas. Destacar que estas rutinas han sido consturidas a partir del “WMTSA Toolbox” versión 0.2.2 de 14/06/2004 que proporciona [8] en su soporte web y que deberá estar instalado de forma que dicho paquete tenga prioridad sobre el paquete standard “Wavelet Toolbox”. En general las funciones y/o rutinas que pintan gráficas lo hacen cuando $N \leq 16$.

A.1. Revisión de la teoría de Fourier.

A.1.1. Filtro periodizado.

Esta función devuelve el filtro periodizado de longitud dada de un filtro finito. Se utilizará en rutinas de transformada DWT y MODWT.

```
periodized_filter.m
1 function [F] = periodized_filter(f,n)
2 %
3 % NAME
4 % periodized_filter -- Returns f's periodized filter to length n
5 %
6 % USAGE
7 % [F] = periodized_filter(f,n)
8 %
9 % INPUTS
10 % f          = filter to periodize
11 % n          = length of periodized filter.
12 %
13 % OUTPUTS
14 % F          = f's periodized filter to length n
15 %
```

```

16 % EXAMPLE
17 % [F] = periodized_filter(f,128);
18
19 usage_str = ['Usage: [F] = ',mfilename,'(f,n)'];
20
21 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [2:2], nargout, [1:1]);
22 if (err)
23     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
24 end
25
26 for k=1:n
27     F(k) = 0;
28     aux = k;
29     while (aux <= length(f))
30         F(k) = F(k) + f(aux);
31         aux = aux + n;
32     end
33 end

```

A.2. Transformadas ortonormales de series temporales.

A.2.1. Matriz de paso de la ODFT.

Esta función devuelve la matriz de paso de la transformada ODFT. Se utiliza exclusivamente para la construcción de la gráfica 2.1.

```

1 function [MF] = basisDFT(N)
2 % NAME
3 % basisDFT -- Return vector basis elements of DFT
4 %
5 % USAGE
6 % basisDFT(N)
7 %
8 % INPUTS
9 % N          = Number of elements
10 %
11 % OUTPUTS
12 % MF         = NxN matrix with vectors on rows
13 %
14 % EXAMPLES
15 % basisDFT(16);
16
17 usage_str = ['Usage: [MF] = ',mfilename,'(N)'];
18
19 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:1], nargout, [0:1]);
20 if (err)
21     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
22 end
23
24 if (N<=0)|(log2(N)~=floor(log2(N)))
25     error('WMTSA:N must be power of 2');
26 end

```

```

27
28 for j=1:N
29     for k=1:N
30         MF(j,k) = exp(-2*pi*i*(k-1)*(j-1)/N)/sqrt(N);
31     end
32 end
33
34 % Pintamos resultados (si N<=16)
35 if (N<=16)
36     for k=1:N/2
37         subplot(N/2,2,2*k-1);
38         plot(0:N-1,real(MF(k,:)),'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
39         hold on;
40         plot(0:N-1,imag(MF(k,:)),'Marker','o','Color','r','MarkerSize',4,...
41             'MarkerFaceColor','r');
42
43         xl = xlim; yl = ylim;
44         str = ['\bf F_{',int2str(k),'.}'];
45         title(str,'Position',[xl(1)-(xl(2)-xl(1))/5 .75*yl(1)+.25*yl(2) 0]);
46         hold off;
47     subplot(N/2,2,2*k);
48     plot(0:N-1,real(MF(N/2+k,:)),'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
49     hold on;
50     plot(0:N-1,imag(MF(N/2+k,:)),'Marker','o','Color','red','MarkerSize',4,...
51         'MarkerFaceColor','r');
52
53     xl = xlim; yl = ylim;
54     str = ['\bf F_{',int2str(N/2+k),'.}'];
55     title(str,'Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/5 .75*yl(1)+.25*yl(2) 0]);
56     hold off;
57 end
58
59     end
60     suptitle(['\bf Filas de la matriz de paso de la DFT para N=',int2str(N)]);
61 end

```

A.2.2. Análisis detallado y componentes suaves/rugosas de Fourier.

Esta función devuelve la transformada, el análisis detallado, las componentes suaves y las componentes rugosas con el análisis de Fourier de una serie. Se emplea para la construcción de las gráficas 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 pero se incluye aquí pues se detalla en este capítulo el algoritmo para su construcción.

```

1 function [F, D, S, R, P]=DFT_DSR(x,graph_status)
2 % NAME
3 % DFT_DSR -- Returns:
4 %             DFT, Details, Smooths and Roughs of x
5 %
6 % USAGE
7 % DFT_DSR(x,[graph_status])
8 %
9 % INPUTS
10 % x           = serie (it must have a power of 2 of elements)
11 % graph_status = graphics (default: on)
12 %

```

```

13 % OUTPUTS
14 % F      = 1xN vector array with DFT of x
15 % D      = 1xN/2 cell array with details of x
16 % S      = 1xN/2 cell array with smooths of x
17 % R      = 1xN/2 cell array with roughs of x
18 % P      = 1xN/2 vector array with periodogram of x
19 %
20 % EXAMPLES
21 % DFT_DSR([1 2 3 4]);
22 % DFT_DSR([1 2 3 4],'off');
23
24 usage_str = ['Usage: [F,D,S,R,P] = ',mfilename,'(x,[graph_status])'];
25
26 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:2], nargout, [0:5]);
27 if (err)
28     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
29 end
30
31 N = length(x);
32 if (N<=0)|(log2(N)~=floor(log2(N)))
33     error('WMTSA:N must be power of 2');
34 end
35
36 if (~exist('graph_status','var')||isempty(graph_status))
37     graph_status = 'on';
38 end
39
40 % Calculo de la FFT
41 F = fft(x)/sqrt(N);
42 for i=1:N/2
43     P(i) = 2*norm(F(i+1))^2/N;
44 end
45 P(N/2) = P(N/2)/2;
46
47 % Calculo de los detalles y componentes suaves/rugosas
48 SO = mean(x)*ones(1,N);
49 RO = x-SO;
50 SA =SO;
51
52 for k=1:N/2
53     for t=0:N-1
54         if (k==N/2)
55             D{N/2}(t+1) = 1/sqrt(N)*real(F(N/2+1))*cos(pi*t);
56         else
57             D{k}(t+1) = 2/sqrt(N)*(real(F(k+1))*cos(2*pi*k*t/N)- imag(F(k+1))*sin(2*pi*k*t/N));
58         end
59     end
60     SA = SA + D{k};
61     S{k} = SA;
62     R{k} = x-SA;
63 end
64
65 % Pintamos resultados si N<=16
66 if (strcmp(graph_status,'on'))&(N<=16)

```

```

67     subplot(1,3,1)
68         plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
69         title('\bf X');
70     subplot(1,3,2)
71         plot(0:N-1,real(F),'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
72         hold on;
73         plot(0:N-1,imag(F),'Marker','o','Color','r','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','r');
74         hold off;
75         title('\bf F');
76     subplot(1,3,3)
77         plot(1:N/2,P,'s','MarkerFaceColor','b');
78         title('\bf P');
79
80     x_str = ['\bf x = [' num2str(x(1))];
81     for i=2:length(x)
82         x_str = [x_str ', ' num2str(x(i))];
83     end
84     x_str = [x_str ''];
85     suptitle({[],'\bf X, DFT y periodograma.',[],x_str});
86
87     display('Pulse una tecla...');
88     pause;
89     close;
90
91     suptitle('\bf Análisis detallado y componentes suaves/rugosas de Fourier.');
```

```

92
93     subplot(N/2+1,3,1), title('\bf D_j');
94     subplot(N/2+1,3,2)
95         plot(0:N-1,S0,'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
96         title('\bf S_j');
97     subplot(N/2+1,3,3)
98         plot(0:N-1,R0,'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
99         title('\bf R_j');
```

```

100
101     for i=1:N/2
102         subplot(N/2+1,3,3*i+1)
103             plot(0:N-1,D{i},'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
104         subplot(N/2+1,3,3*i+2)
105             plot(0:N-1,S{i},'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
106         subplot(N/2+1,3,3*i+3)
107             plot(0:N-1,R{i},'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
108             xl = xlim; yl = ylim;
109             str = strcat('\bf j=',int2str(i),'');
110             title(str,'Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
111     end
112
113
114     display('Pulse una tecla...');
115     pause;
116     close;
117
118 end
```

A.2.3. Rutina de control.

Esta rutina es la que invoca a las demás del capítulo con el fin de preparar la ejecución con los datos particulares que se precisan para el almacenamiento de las tablas de datos en fichero necesarias para construir las gráficas.

```

1                                     capitulo_2.m
2 % Cargamos el paquete WMTSA
3 run /usr/local/matlab7/toolbox/wmtsa/startup.m
4 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Filas de la transformada DFT para N=16 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5 % Ubicación: Transformada ortonormal de Fourier discreta
6 clear;
7 N = 16;
8 [MF] = basisDFT(N);
9 display('Pulse una tecla...');
10 pause;
11 close;
12
13 % Guardamos los resultados.
14 for k=1:N/2
15     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=real(MF(k,:));
16     dlmwrite(['../Fourier/waveletA',int2str(k),'re.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
17     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=imag(MF(k,:));
18     dlmwrite(['../Fourier/waveletA',int2str(k),'im.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
19
20     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=real(MF(N/2+k,:));
21     dlmwrite(['../Fourier/waveletB',int2str(k),'re.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
22     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=imag(MF(N/2+k,:));
23     dlmwrite(['../Fourier/waveletB',int2str(k),'im.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
24 end

```

A.3. Transformada wavelet discreta.

A.3.1. Matriz de paso de diversas DWT.

Esta función devuelve la matriz de paso de la transformada DWT. Se utiliza exclusivamente para la construcción de las gráficas 3.3 y 3.4.

```

1                                     basisDWT.m
2 function [MW] = basisDWT(n,wave,level)
3 % NAME
4 % basisDWT -- Return vector basis elements of DWT
5 %
6 % USAGE
7 % basisDWT(n,wave,level)
8 %
9 % INPUTS
10 % n           = Number of elements
11 % wave        = wavelet for DWT (default 'la8')
12 % level       = Number of stages (default log2(n))
13 %
14 % OUTPUTS

```

```

14 % MW          = NxN matrix with vectors on rows
15 %
16 % EXAMPLES
17 %   basisDWT(16);
18 %   basisDWT(128,'haar');
19 %   basisDWT(128,'haar',4); (partial DWT)
20
21 usage_str = ['Usage: [MF] = ',mfilename,'(n,[wave],[level])'];
22
23 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:3], nargout, [0:1]);
24 if (err)
25     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
26 end
27
28 if (n<=0)|(log2(n)~=floor(log2(n)))
29     error('WMTSA:n must be power of 2');
30 end
31
32 if (~exist('level','var')||isempty(level))
33     level = log2(n);
34 elseif (level~=floor(level)|(level>log2(n)))
35     error('WMTSA:level must be integer less equal to log2(N)');
36 end
37
38 if (~exist('wave','var')||isempty(wave))
39     wave = 'la8';
40 end
41
42 try
43     [h,g,L] = dwt_equivalent_filter(wave,level);
44 catch
45     disp([mfilename, ': Wavelet (' ,wave,') unkon or unsupported.']);
46     rethrow(lasterror);
47 end
48
49 suffix = upper(wave);
50
51 N = @(j) n/2^j;
52
53 H = zeros(level,n);
54 G = zeros(level,n);
55
56 for i=1:level
57     H(i,:) = periodized_filter(h{i},n);
58     G(i,:) = periodized_filter(g{i},n);
59 end
60
61 % Definimos la matriz MW
62
63 MW = zeros(n);
64 cont = 1;
65 for i=1:level
66     for q=1:n
67         MW(cont,q)=H(i,mod(2^i-q,n)+1);

```

```

68     end
69     cont=cont+1;
70     for k=1:N(i)-1
71         for q=1:n
72             MW(cont,mod(k*2^i+q,n)+1) = H(i,mod(2^i-1-q,n)+1);
73         end
74         cont =cont +1;
75     end
76 end
77
78 MW(n,:) = periodized_filter(g[level],n);
79
80
81 % Pintamos los resultados (si N<=16)
82 if (n<=16)
83     for k=1:n/2
84         subplot(n/2,2,2*k-1);
85         plot(0:n-1,real(MW(k,:)),'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
86         xl = xlim; yl = ylim;
87         str = ['\bf W_{',int2str(k),'.}'];
88         title(str,'Position',[xl(1)-(xl(2)-xl(1))/5 .75*yl(1)+.25*yl(2) 0]);
89         subplot(n/2,2,2*k);
90         plot(0:n-1,real(MW(n/2+k,:)),'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
91         xl = xlim; yl = ylim;
92         str = ['\bf W_{',int2str(n/2+k),'.}'];
93         title(str,'Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/5 .75*yl(1)+.25*yl(2) 0]);
94     end
95     suptitle(['\bf Filas de la matriz de paso de la DWT de }',wave,'\bf para N=',int2str(n)]);
96 end

```

A.3.2. Ejemplo de las series cortas.

Esta función calcula la transformada de Fourier, DWT de Haar y DWT de $D(4)$ de una serie así como los periodogramas asociados a dichas transformaciones. Se utiliza sólo a fin de generar los datos para la construcción de las gráficas 3.5 y 3.6.

```

----- ejemplo_serie.m -----
1  function [F,PF,WH,HPW,WD,DPW]=ejemplo_serie(x)
2  % NAME
3  % ejemplo_serie -- Returns:
4  %             DFT, periodogram DFT
5  %             Haar DWT, periodogram Haar DWT
6  %             D(4) DWT, periodogram D(4) DWT
7  %
8  % USAGE
9  % ejemplo_serie(x,subindex)
10 %
11 % INPUTS
12 % x             = serie (it must have a power of 2 of elements)
13 %
14 % OUTPUTS
15 % F             = DFT of x
16 % PF           = periodogram of Fourier of x

```

```

17 % WH          = Haar DWT of x
18 % HPW        = periodogram of Haar DWT of x
19 % WD         = Daubechies DWT of x
20 % DPW        = periodogram of Daubechies DWT of x
21 %
22 % EXAMPLES
23 %   ejemplo_serie([1 2 3 4]);
24
25 usage_str = ['Usage: [F,PF,WH,HPW,WD,DPW] = ',mfilename,'(x)'];
26
27 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:1], nargout, [0:6]);
28 if (err)
29     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
30 end
31
32 n = length(x);
33 if (n<=0)|(log2(n)~=floor(log2(n)))
34     error('WMTSA:x must have a power of 2 number of elements');
35 end
36
37 % Inicialización.
38 N = @(j) n/2^j;
39
40 % Calculamos la fft y el periodograma Fourier
41 F = fft(x)/sqrt(n);
42
43 for i=1:n/2
44     PF(i) = 2*norm(F(i+1))^2/n;
45 end
46 PF(n/2) = PF(n/2)/2;
47
48 % Calculamos las transformadas DWT de Haar y D(4)
49 WH = dwt(x,'haar',4,'periodic');
50 WD = dwt(x,'d4',4,'periodic');
51
52 % Calculamos los periodogramas wavelet.
53 for k=1:4
54     DPW(k) = 1/n*norm(WD(n-N(k-1)+1:n-N(k)))^2;
55     HPW(k) = 1/n*norm(WH(n-N(k-1)+1:n-N(k)))^2;
56 end
57
58 % Pintamos resultados.
59 if (n<=16)
60     % Fourier (1 fila)
61     subplot(3,3,1);
62     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
63     xl = xlim; yl = ylim;
64     title('\bf X','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
65     subplot(3,3,2);
66     plot(0:n-1,real(F),'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
67     hold on;
68     plot(0:n-1,imag(F),'Marker','o','Color','red','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','r');
69     xl = xlim; yl = ylim;
70     title('\bf F','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);

```

```

71     hold off;
72 subplot(3,3,3);
73     plot(1:length(PF),PF,'s','MarkerFaceColor','b');
74     xl = xlim; yl = ylim;
75     title('\bf P_F','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
76 % Haar (2 fila)
77 subplot(3,3,4);
78     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
79     xl = xlim; yl = ylim;
80     title('\bf X','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
81 subplot(3,3,5);
82     plot(0:n-1,WH,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
83     xl = xlim; yl = ylim;
84     hold on;
85     plot([8.5 8.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
86     plot([12.5 12.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
87     plot([14.5 14.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
88     plot([15.5 15.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
89     hold off;
90     title('\bf W','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
91 subplot(3,3,6);
92     plot(1:length(HPW),HPW,'s','MarkerFaceColor','b');
93     xlim([1 length(HPW)+1]);
94     xl = xlim; yl = ylim;
95     title('\bf P_W','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
96 % D(4) (3 fila)
97 subplot(3,3,7);
98     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
99     xl = xlim; yl = ylim;
100    title('\bf X','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
101 subplot(3,3,8);
102    plot(0:n-1,WD,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
103    xl = xlim; yl = ylim;
104    hold on;
105    plot([8.5 8.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
106    plot([12.5 12.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
107    plot([14.5 14.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
108    plot([15.5 15.5],[yl(1) yl(2)],'Color','black','LineStyle','--','LineWidth',2);
109    hold off;
110    title('\bf W','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
111 subplot(3,3,9);
112    plot(1:length(DPW),DPW,'s','MarkerFaceColor','b');
113    xlim([1 length(DPW)+1]);
114    xl = xlim; yl = ylim;
115    title('\bf P_W','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/10 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
116
117 % Titulo
118 x_str = ['\bf x = [ ' num2str(x(1))];
119 for i=2:length(x)
120     x_str = [x_str ', ' num2str(x(i))];
121 end
122 x_str = [x_str ' ]';
123 suptitle({'\bf Serie, transformada y periodograma de X con Fourier, Haar, D(4)',[],x_str});

```

```

124
125 end

```

A.3.3. Filtros wavelet y escala de diversas anchuras.

Esta función calcula y dibuja un conjunto de filtros wavelet y escala de una de las familias $C(L)$, $D(L)$ o $LA(L)$ para diferentes valores de L . Se utiliza para obtener los datos de las gráficas 3.13, 3.14 y 3.17.

```

----- filters.m -----
1 function [H,G,L] = filters(wavelet)
2 % NAME
3 % filters -- Return cell array with filters of wavelet DWT
4 %           for several width.
5 %
6 % USAGE
7 % filters(wavelet)
8 %
9 % INPUTS
10 % wavelet      = Wavelet family for DWT (c,d,la)
11 %
12 % OUTPUTS
13 % H           = 1xN cell array with wavelet filters of several width
14 % G           = 1xN cell array with scaling filters of several width
15 % L           = 1xN cell array with widths
16 %
17 % EXAMPLES
18 % [H,G,L] = filters('la8');
19
20 usage_str = ['Usage: [H, G, L] = ',mfilename,'(wavelet)'];
21
22 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:1], nargout, [0:3]);
23 if (err)
24     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
25 end
26
27 % Check for valid wavelet
28 if ~(strcmp(wavelet,'la')||strcmp(wavelet,'c')||strcmp(wavelet,'d'))
29     error([mfilename,': Unknown wavelet filter (', wavelet, ') specified.']);
30 end
31
32 % Get list of widths
33 switch wavelet
34     case 'd'
35         family = 'Daubechies';
36         index = [2 4 6 8 10 12 14 16 18 20];
37     case 'c'
38         family = 'Coiflet';
39         index = [6 12 18 24 30];
40     case 'la'
41         family = 'Least Asymetric';
42         index = [8 10 12 14 16 18 20];
43 end

```

```

44
45 % Build wavelet and scaling filters
46 for i=1:length(index)
47     wave = strcat(wavelet,int2str(index(i)));
48     if strcmp(wave,'d2')
49         wave = 'haar';
50     end
51     [H{i}, G{i}, L{i}] = dwt_filter(wave);
52 end
53
54 % Plot results
55
56 for k=1:length(index)
57     axis ([0 L{length(index)} 0 1]);
58     axis 'auto y';
59     subplot(length(index),2,2*k-1);
60         plot(H{k},'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
61
62     axis ([0 L{length(index)} 0 1]);
63     axis 'auto y';
64     subplot(length(index),2,2*k);
65         plot(G{k},'s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
66         xl = xlim; yl = ylim;
67         str = ['\bf L=',int2str(L{k}),']';
68         title(str,'Position',[-L{length(index)}/6 .75*yl(1)+.25*yl(2) 0]);
69 end
70 suptitle(['\bf Wavelet and Scaling filters for ',upper(wavelet),'\bf family']);

```

A.3.4. Filtros de orden superior de la transformada DWT.

Esta función calcula los filtros wavelet y de escala de orden superior que se emplean en las distintas etapas del algoritmo piramidal DWT. Se utiliza sólo a fin de generar los datos para la construcción de las gráficas 3.15, 3.16 y 3.18.

```

----- highlevel_filters.m -----
1 function [h,g,L] = highlevel_filters(wave,level)
2 % NAME
3 % highlevel_filters --
4 %
5 % USAGE
6 % highlevel_filters(wave,level)
7 %
8 % INPUTS
9 % wave          = wavelet
10 % level         = number of stages of DWT algorithm
11 %
12 % OUTPUTS
13 % h            = 1xlevel cell array with wavelet filters.
14 % g            = 1xlevel cell array with scaling filters.
15 % L            = 1xlevel cell array with lengths of filters.
16 %
17 % EXAMPLE
18 % highlevel_filters('la8',7);

```

```

19
20 usage_str = ['Usage: ',mfilename,'(wave,level)'];
21
22 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [2:2], nargout, [0:3]);
23 if (err)
24     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
25 end
26
27 if (~exist('wave','var')||isempty(wave))
28     wave = 'la8';
29 else
30     try
31         [h,g,L] = dwt_equivalent_filter(wave,level);
32     catch
33         disp([mfilename, ': Wavelet (',wave,') unkonon or unsupported.']);
34         rethrow(lasterror);
35     end
36 end
37
38 if (level~=floor(level))|(level<=0)
39     error('WMTSA:level must be integer greater to 0');
40 end
41
42 for i=1:level
43     H(i,1:L{i}) = h{i};
44     G(i,1:L{i}) = g{i};
45 end
46
47 % Pintamos los resultados
48 subplot(level+1,2,1), plot(h{1}), , xlim([1 L{1}]), title('\bf Wavelet, h_{j,1}');
49 subplot(level+1,2,2), plot(g{1}), , xlim([1 L{1}]), title('\bf Scaling, g_{j,1}');
50 for i=2:level
51     subplot(level+1,2,2*i-1), plot(h{i}), xlim([1 L{i}]);
52     subplot(level+1,2,2*i), plot(g{i}), xlim([1 L{i}]);
53 end
54
55 suptitle(['\bf Filtros de orden superior de \bf',wave,' para J_0=',int2str(level)]);
56

```

A.3.5. Análisis detallado y componentes suaves/rugosas DWT.

Esta función devuelve la transformada, el análisis detallado, las componentes suaves y las componentes rugosas con el análisis DWT de una serie. Se emplea para la construcción de las gráficas 3.5, 3.6, 3.9 y 3.10 además de las gráficas correspondientes a los análisis de las secciones 4.1 y 4.2.

```

----- DWT_MRA.m -----
1 function [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x,wavelet,level,boundary,graph_status)
2 % NAME
3 % DWT_MRA -- Returns:
4 %             DWT, Details, Smooths and periodogram of x
5 %
6 % USAGE

```

```

7  % [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x,wavelet,[level],[boundary],[graph_status]);
8  %
9  % INPUTS
10 % x          = serie (it must have a power of 2 of elements)
11 % wavelet    = WMTSA wavelet to do the DWT MRA
12 % level      = Number of stages [default: log2(length(x))]
13 % boundary   = Boundary conditions (default: periodic)
14 % graph_status = graphics (default: on)
15 %
16 %
17 % OUTPUTS
18 % W          = 1xN vector array with DWT of x
19 % D          = levelxN array with details of x
20 % S          = levelxN array with smooths of x
21 % R          = levelxN array with roughs of x
22 % P          = 1xlevel vector array with periodogram of x
23 %
24 % EXAMPLES
25 %   DWT_MRA([1 2 3 4], 'la8');
26 %   DWT_MRA([1 2 3 4], 'la8', 2, 'reflection', 'off');
27
28 usage_str = ['Usage: [W,D,S,R,P] = ', mfilename, '(x,wavelet,[level],[boundary],[graph_status)'];
29
30 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [2:5], nargout, [0:5]);
31 if (err)
32     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
33 end
34
35 n = length(x);
36 if (n<=0) | (log2(n)~=floor(log2(n)))
37     error('WMTSA:N must be power of 2');
38 end
39
40 % Check for valid wavelet and get wavelet filter coefficients
41 try
42     [ht, gt, L, name] = dwt_filter(wavelet);
43 catch
44     disp([mfilename, ': Error creating dwt filter']);
45     rethrow(lasterror);
46 end
47
48 if (~exist('level','var') || isempty(level))
49     level = log2(n);
50 end
51
52 if (~exist('boundary','var') || isempty(boundary))
53     boundary = 'periodic';
54 end
55
56 if (~exist('graph_status','var') || isempty(graph_status))
57     graph_status = 'on';
58 end
59
60 % Calculamos la transformada

```

```

61 [W,N] = dwt(x,wavelet,level,boundary);
62
63 % Calculamos los detalles
64 D = idwt_details(W,N,wavelet);
65 D = D';
66
67 % Calculamos las componentes suaves.
68 naux = N(level+1);
69 Vj = W(n-naux+1:n);
70 for i=level:-1:1
71     S(i,:) = idwt_smooth(Vj,wavelet,i);
72     naux = naux + N(i);
73     Vj = idwtj(W(n-naux+1:n-naux+N(i)),Vj,ht,gt,i);
74 end
75
76 % Calculamos las componentes rugosas.
77 vaux = D(1,:);
78 R(1,:) = vaux;
79 for i=2:level
80     vaux = vaux + D(i,:);
81     R(i,:) = vaux;
82 end
83
84 % Calculamos los coeficientes frontera
85 C = boundary_coeficients(n,L,level);
86
87 % Calculamos el periodograma.
88 P(1) = 1/n*norm(W(1:n-N(1)))^2;
89 for i=2:level
90     P(i) = 1/n*norm(W(n-N(i-1)+1:n-N(i)))^2;
91 end
92
93
94 % Pintamos resultados
95 if (strcmp(graph_status,'on'))
96     subplot(3,1,1)
97         plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b'), title('\bf X');
98         xlim([0,n]);
99     subplot(3,1,2)
100        plot(0:n-1,W,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b'), title('\bf W');
101        xlim([0,n]);
102        yl = ylim;
103        hold on;
104        naux = 0;
105        for i=1:level
106            naux = naux +N(i);
107            plot([naux+1 naux+1],[yl(1) yl(2)],'LineStyle','--','Color','r','LineWidth',1.5);
108        end
109        hold off;
110    if (n>32)
111        set(findobj('Marker','s'),'Marker','none');
112    end
113    subplot(3,1,3)
114        plot(1:level,P,'s','MarkerFaceColor','b'), title('\bf P');

```

```

115     xlim([0,level+1]);
116
117     if (n<=16)
118         x_str = ['\bf x = ' num2str(x(1))];
119         for i=2:length(x)
120             x_str = [x_str ', ' num2str(x(i))];
121         end
122         x_str = [x_str ''];
123         suptitle({'\bf X, DWT and periodogram with wavelet ',wavelet,'],'),[],x_str});
124     else
125         suptitle({'\bf X, DWT and periodogram with wavelet ',wavelet,'],'});
126     end;
127     display('Pulse una tecla...');
128     pause;
129     close;
130
131
132     for i=1:level
133         subplot(level+1,3,3*i-2)
134             plot(0:n-1,D(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
135             xlim([0,n]);
136             xl = xlim; yl = ylim;
137             if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
138                 hold on;
139                 plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
140                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
141                 plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
142                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
143             hold off;
144         end
145         set(gca, 'XTickLabel', {' '});
146         str = ['\bf D_', int2str(level-i+1), ''];
147         title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
148         subplot(level+1,3,3*i-1)
149             plot(0:n-1,S(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
150             xlim([0,n]);
151             xl = xlim; yl = ylim;
152             if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
153                 hold on;
154                 plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
155                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
156                 plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
157                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
158             hold off;
159         end
160         set(gca, 'XTickLabel', {' '});
161         str = ['\bf S_', int2str(level-i+1), ''];
162         title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
163         subplot(level+1,3,3*i)
164             plot(0:n-1,R(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
165             xlim([0,n]);
166             xl = xlim; yl = ylim;
167             if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
168                 hold on;

```

```

169         plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
170             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
171         plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
172             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
173         hold off;
174     end
175     set(gca, 'XTickLabel', {' '});
176     str = ['\bf R_', int2str(level-i+1), ''];
177     title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
178 end
179 subplot(level+1,3,3*level+1)
180     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
181     xlim([0,n]);
182     xl = xlim; yl = ylim;
183     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
184 subplot(level+1,3,3*level+2)
185     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
186     xlim([0,n]);
187     xl = xlim; yl = ylim;
188     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
189 subplot(level+1,3,3*level+3)
190     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
191     xlim([0,n]);
192     xl = xlim; yl = ylim;
193     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
194
195 if (n<=16)
196     suptitle({'\bf X, DWT Details, Smooths and Roughs with wavelet ',wavelet,''}, [], x_str);
197 else
198     suptitle(['\bf X, DWT Details, Smooths and Roughs with wavelet ',wavelet,'']);
199 end
200
201 if (n>32)
202     set(findobj('Marker','s'),'Marker','none');
203 end
204 display('Pulse una tecla...');
205 pause;
206 close;
207 end;

```

A.3.6. Rutina de control.

Esta rutina es la que invoca a las demás del capítulo con el fin de preparar la ejecución con los datos particulares que se precisan para el almacenamiento de las tablas de datos en fichero necesarias para construir las gráficas.

```

                                     capitulo_3.m
1  % Cargamos el paquete WMTSA
2  run /usr/local/matlab7/toolbox/wmtsa/startup.m
3
4  %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Matrices de paso de la DWT Haar y D(4) %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5  % Ubicación: Descripción cualitativa de la DWT
6  clear;

```

```

7  N = 16;
8
9  % FIG1 : Ondicula de Haar
10 [MW] = basisDWT(N,'haar',4);
11 display('Pulse una tecla...');
12 pause;
13 close;
14
15 % Guardamos los resultados.
16 for k=1:N/2
17     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=MW(k,:)/4;
18     dlmwrite(['../Haar/waveletA',int2str(k),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
19
20     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=MW(N/2+k,:)/4;
21     dlmwrite(['../Haar/waveletB',int2str(k),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
22 end
23
24 % FIG2 : Ondicula de Daubechies, L=4
25 [MW] = basisDWT(N,'d4',4);
26 display('Pulse una tecla...');
27 pause;
28 close;
29
30 % Guardamos los resultados.
31 for k=1:N/2
32     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=MW(k,:)/4;
33     dlmwrite(['../Daubechies/waveletA',int2str(k),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
34
35     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=MW(N/2+k,:)/4;
36     dlmwrite(['../Daubechies/waveletB',int2str(k),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
37 end
38
39 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ejemplo serie corta %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
40 % Ubicación: Descripción cualitativa de la DWT
41
42 %%% Serie X_1 y X_2 del ejemplo
43 %% Transformadas y periodogramas
44 clear;
45
46 % Primera pasada x=X_1
47 x = [0.2 -0.4 -0.6 -0.5 -0.8 -0.4 -0.9 0 -0.2 0.1 -0.1 0.1 0.7 0.9 0 0.3];
48 for subindex=1:2
49     N = length(x);
50     [F,PF,WH,HPW,WD,DPW] = ejemplo_serie(x);
51     display('Pulse una tecla...');
52     pause;
53     close;
54
55     % Guardamos en fichero.
56     clear X;X(:,1)=0:length(x)-1;X(:,2)=x/2;
57     dlmwrite(['../ejemplo/X',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
58     clear X;X(:,1)=0:length(F)-1;X(:,2)=real(F)/4;
59     dlmwrite(['../ejemplo/F',int2str(subindex),'.re.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
60     clear X;X(:,1)=0:length(F)-1;X(:,2)=imag(F)/4;

```

```

61     dlmwrite(['../ejemplo/F',int2str(subindex),'.im.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
62     clear X;X(:,1)=1:length(x)/2;X(:,1) = X(:,1)/length(x); X(:,2)=PF;
63     dlmwrite(['../ejemplo/PF',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
64
65     clear X;X(:,1)=0:length(WH)-1;X(:,2)=WH/2;
66     dlmwrite(['../ejemplo/WH',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
67     clear X;X(:,1)=0:length(HPW)-1;X(:,2)=HPW;
68     dlmwrite(['../ejemplo/PH',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
69     clear X;X(:,1)=0:length(WD)-1;X(:,2)=WD/2;
70     dlmwrite(['../ejemplo/WD',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
71     clear X;X(:,1)=0:length(DPW)-1;X(:,2)=DPW;
72     dlmwrite(['../ejemplo/PD',int2str(subindex),'.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
73
74     %% Detalles, componentes suaves/rugosas Fourier
75     [F,D,S,R] = DFT_DSR(x);
76
77     % Guardamos en fichero
78     SO = mean(x)*ones(1,N); RO = x-SO;
79     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=SO;
80     dlmwrite(['../ejemplo/SF',int2str(subindex),'.0.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
81     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=RO;
82     dlmwrite(['../ejemplo/RF',int2str(subindex),'.0.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
83     for i=1:N/2
84         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=D{i};
85         dlmwrite(['../ejemplo/DF',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
86             'precision','%4f');
87         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=S{i};
88         dlmwrite(['../ejemplo/SF',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
89             'precision','%4f');
90         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=R{i};
91         dlmwrite(['../ejemplo/RF',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
92             'precision','%4f');
93     end
94
95     %% MRA wavelet decomposition.
96     level = 4;
97     % Wavelet; Haar
98     [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x,'haar');
99
100    % Guardamos en fichero
101    SO = x; RO = zeros(1,N);
102    clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=SO;
103    dlmwrite(['../ejemplo/SH',int2str(subindex),'.0.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
104    clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=RO;
105    dlmwrite(['../ejemplo/RH',int2str(subindex),'.0.dat'],X,'delimiter',' ','precision','%4f');
106    for i=1:level
107        clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=D(i,:);
108        dlmwrite(['../ejemplo/DH',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
109            'precision','%4f');
110        clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=S(i,:);
111        dlmwrite(['../ejemplo/SH',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
112            'precision','%4f');
113        clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=R(i,:);
114        dlmwrite(['../ejemplo/RH',int2str(subindex),int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...

```

```

115         'precision', '%.4f');
116     end
117
118     % Wavelet; D(4)
119     [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x, 'd4');
120
121     % Guardamos en fichero
122     SO = x; RO = zeros(1,N);
123     clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=SO;
124     dlmwrite(['../ejemplo/SD', int2str(subindex), '0.dat'], X, 'delimiter', ' ', 'precision', '%.4f');
125     clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=RO;
126     dlmwrite(['../ejemplo/RD', int2str(subindex), '0.dat'], X, 'delimiter', ' ', 'precision', '%.4f');
127     for i=1:level
128         clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=D(i,:);
129         dlmwrite(['../ejemplo/DD', int2str(subindex), int2str(i), '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
130             'precision', '%.4f');
131         clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=S(i,:);
132         dlmwrite(['../ejemplo/SD', int2str(subindex), int2str(i), '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
133             'precision', '%.4f');
134         clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=R(i,:);
135         dlmwrite(['../ejemplo/RD', int2str(subindex), int2str(i), '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
136             'precision', '%.4f');
137     end
138
139     % Segunda pasada x=X_2
140     x = [0.2 -0.4 -0.6 -0.5 -0.8 -0.4 -0.9 0 -0.2 0.1 -0.1 0.1 0.7 -0.9 0 0.3];
141 end
142
143
144 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Filtros wavelet y de escala de diferentes longitudes. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
145 % Ubicación: Wavelet de Daubechies, Wavelet de Coiflet
146
147 clear;
148 waves = {'d' 'c' 'la'};
149 for i=1:length(waves)
150     [H,G,L] = filters(waves{i});
151     for j=1:length(H)
152         wavelet = strcat(waves{i}, int2str(L{j}));
153         clear X; X(:,1)=0:L{j}-1; X(:,2)=H{j};
154         dlmwrite(['../wavelet_filters/', upper(wavelet), '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
155             'precision', '%.4f');
156         clear X; X(:,1)=0:L{j}-1; X(:,2)=G{j};
157         dlmwrite(['../scaling_filters/', upper(wavelet), '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
158             'precision', '%.4f');
159     end
160     display('Pulse una tecla...');
161     pause;
162     close;
163 end
164
165 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Filtros wavelet y de escala de órdenes superiores. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
166 % Ubicación: Wavelet de Daubechies, Wavelet de Coiflet
167 clear;
168 waves = {'d4' 'la8' 'c6'};

```

```

169 level = 7;
170 for i=1:length(waves)
171     wave = waves{i};
172     [h,g,L] = highlevel_filters(wave,level);
173     display('Pulse una tecla...');
174     pause;
175     close;
176     % Guardamos en fichero.
177     suffix = upper(wave);
178
179     % Filtros de orden 1.
180     clear X;X(:,1)=0:L{1}-1;X(:,2)=h{1};
181     dlmwrite(['../wavelet_filters/',suffix,'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
182     clear X;X(:,1)=0:L{1}-1;X(:,2)=g{1};
183     dlmwrite(['../scaling_filters/',suffix,'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
184     % Filtros de orden superior
185     for i=2:level
186         clear X;X(:,1)=0:L{i}-1;X(:,2)=h{i};
187         dlmwrite(['../wavelet_filters/',suffix,'h',int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
188             'precision', '%.4f');
189         clear X;X(:,1)=0:L{i}-1;X(:,2)=g{i};
190         dlmwrite(['../scaling_filters/',suffix,'h',int2str(i),'.dat'],X,'delimiter',' ','...
191             'precision', '%.4f');
192     end
193 end

```

A.4. Ejemplos.

A.4.1. Coeficientes frontera en la transformación DWT.

Esta función devuelve un array con el origen y el extremo del intervalo de coeficientes no afectados por la circularidad en los detalles y aproximaciones. Se utiliza para la construcción de las gráficas correspondientes a la sección 4.2.

```

----- boundary_coeficients.m -----
1 function [C]= boundary_coeficients(N,L,level)
2 % NAME
3 % boundary_coeficients -- Returns the range of coeficients
4 %                               not affected by boundary conditions
5 %                               in DWT transform.
6 %
7 %
8 % USAGE
9 % boundary_coeficients(N,L,[level])
10 %
11 % INPUTS
12 % N           = Number of observations (it must be a power of 2)
13 % L           = Width of wavelet and scaling filter.
14 % level       = Number of levels (default: log2(N))
15 %
16 % OUTPUTS
17 % C           = levelx2 array with non boundary coeficients range

```

```

18 %           at each level.
19 %
20 % EXAMPLES
21 %   boundary_coefficients(1024,8);
22 %   boundary_coefficients(1024,8,4);   (partial DWT)
23
24 usage_str = ['Usage: [C] = ',mfilename,'(N,L,[level])'];
25
26 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [2:3], nargout, [0:1]);
27 if (err)
28     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
29 end
30
31 if (N<=0)|(log2(N)~=floor(log2(N)))
32     error('WMTSA:N must be power of 2',[usage_str]);
33 end
34
35 if (L<=0)
36     error('WMTSA:L must be power positive',[usage_str]);
37 end
38
39 if (~exist('level','var')||isempty(level))
40     level = log2(N);
41 end
42
43
44 C = zeros(level,2);
45 % Lj = longitud de los filtros escala y wavelet de orden j
46 l=@(j) (2^j-1)*(L-1)+1;
47 % L'(L,j) = numero de coeficientes frontera en los detalles de orden j
48 % para un filtro de anchura L
49 lP=@(j) ceil((L-2)*(1-1/2^j));
50
51 % Calculo de los coeficientes de frontera
52 % C(j,1) -> limite por la izquierda
53 % C(j,2) -> limite por la derecha
54 for j=1:level
55     C(j,1) = 2^j*lP(j);
56     C(j,2) = N+2^j-1(j);
57 end
58
59 display('Cálculo de los coeficientes frontera para la transformada DWT');
60 display(['   N=',int2str(N),',   L=',int2str(L),'   J=',int2str(level)]);

```

A.4.2. Ejemplos ilustrativos.

Esta función devuelve la serie, DFT, periodograma, DWT periodograma y los detalles, aproximaciones y componentes rugosas wavelet wavelet de cada uno de los ejemplos ilustrativos y los dibuja. Se emplea para la construcción de las gráficas correspondientes a la sección 4.1. La siguiente función realiza la misma función que esta pero para una serie

cualquiera y se deja esta aquí por comodidad pues tiene implementada la construcción de la serie de los ejemplos ilustrativos y se puede invocar cómodamente.

```

----- ejemplos_ilustrativos.m -----
1 function [x,F,PF,W,PW,D,S,R]=ejemplos_introductorios(serie,level,N,wavelet,graph_status)
2 % NAME
3 % ejemplos_introductorios -- Returns:
4 %
5 %
6 % USAGE
7 % ejemplos_introductorios(serie,[level],[N],[wavelet],[graph_status])
8 %
9 % INPUTS
10 % serie = Name of serie:
11 %      sumsin, breakdown, whitenoise,
12 %      normalnoise, step, triangle
13 % level = number of levels (default: log2(N))
14 % N     = Number of elements of serie (default: 1024)
15 % wavelet = Wavelet (default: la8)
16 % graph_status = graphics (default: on)
17 %
18 % OUTPUTS
19 % x     = 1xN vector array with serie.
20 % F     = 1xN vector array with DFT of X
21 % PF    = 1xN/2 vector array with DFT periodogram of x
22 % W     = 1xN vector array with DWT of X
23 % PF    = 1xlevel vector array with DWT periodogram of x
24 % D     = levelxN array with wavelet details of x of levels 1,...,level
25 % S     = levelxN array with wavelet smooths of x of levels 1,...,level
26 % R     = levelxN array with wavelet roughs of x of levels 1,...,level
27 %
28 % EXAMPLES
29 % ejemplos_introductorios('sumsin')
30 % ejemplos_introductorios('sumsin',4,1024,'haar','off')
31
32 usage_str = ['Usage: [x,F,PF,W,PW,D,S,R] = ',...
33             mfilename,'(serie,[level],[N],[wavelet],[graph_status])'];
34 serie_str = ['Supported series: sumsin, breakdown, whitenoise, normalnoise, step, triangle'];
35
36 % Check and manage arguments.
37 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [1:5], nargout, [0:8]);
38 if (err)
39     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
40 end
41
42 if (~exist('N','var')||isempty(N))
43     N = 1024;
44 elseif (N<=0)|(log2(N)~=floor(log2(N)))
45     error('WMTSA:N must be power of 2');
46 end
47
48 if (~exist('level','var')||isempty(level))
49     level = log2(N);
50 elseif (level~=floor(level))|(level>log2(N))
51     error('WMTSA:level must be integer less equal to log2(N)');

```

```

52 end
53
54 if (~exist('wavelet','var')||isempty(wavelet))
55     wavelet = 'la8';
56     [h,g,L] = dwt_filter(wavelet);
57 else
58     try
59         [h,g,L] = dwt_filter(wavelet);
60     catch
61         disp([mfilename, ': Wavelet (',wavelet,') unknow or unsupported.']);
62         rethrow(lasterror);
63     end
64 end
65
66
67
68 if (~exist('graph_status','var')||isempty(graph_status))
69     graph_status = 'on';
70 end
71
72 % Build the serie.
73 for t=1:N
74     switch serie
75         case 'sumsin'
76             x(t) = sin(3*t)+sin(0.3*t)+sin(0.03*t);
77         case 'breakdown'
78             if (t<=512)
79                 x(t) = sin(0.03*t);
80             else
81                 x(t) = sin(3*t);
82             end
83         case 'whitenoise'
84             x(t) = unifrnd(-0.5,.5);
85         case 'normalnoise'
86             x(t) = normrnd(0,1);
87         case 'step'
88             if (t<=256)
89                 x(t) = 0;
90             elseif (t<=512)
91                 x(t) = 1;
92             elseif (t<=768)
93                 x(t) = 3;
94             else
95                 x(t) = 6;
96             end
97         case 'derivatetestep'
98             if (t<=512)
99                 x(t) = t/512;
100             else
101                 x(t) = 1+20*(t-512)/512;
102             end
103         case 'triangle'
104             if (t<=512)
105                 x(t) = t/512+sin(0.3*t);

```

```

106         else
107             x(t) = (1024-t)/512+sin(0.3*t);
108         end
109     case 'bump'
110         if (t>=41)&(t<=46)
111             x(t) = 1/2*cos(3*pi*(t-1)/16+.08);
112         else
113             x(t) = 0;
114         end
115     case 'bumpT'
116         if (t>=46)&(t<=51)
117             x(t) = 1/2*cos(3*pi*(t-6)/16+.08);
118         else
119             x(t) = 0;
120         end
121     otherwise
122         error(['WMTSA:serie ('serie,') unknown or unsupported'],[serie_str]);
123     end
124 end
125
126 % Calculation of values F,PF,W,PW,D,S.
127 [F, PF] = DFT(x,'off');
128 [W, D, S, R, PW] = DWT_MRA(x,wavelet,level,'periodic','off');
129
130 % Plot results.
131 if (strcmp(graph_status,'on'))
132     subplot(2,3,1)
133         plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
134         xlim([0,N]);
135         title('\bf X');
136     subplot(2,3,4)
137         plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b'), title('\bf X');
138         xlim([0,N]);
139
140     subplot(2,3,2)
141         plot(0:N-1,real(F),'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
142         hold on;
143         plot(0:N-1,imag(F),'Marker','s','Color','r','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','r');
144         hold off;
145         xlim([0,N]);
146         title('\bf F');
147     subplot(2,3,5)
148         plot(0:N-1,W,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b'), title('\bf W');
149         xlim([0,N]);
150
151     if (N>32)
152         set(findobj('Marker','s'),'Marker','none');
153     end
154
155     subplot(2,3,3)
156         plot(1:N/2,PF,'s','MarkerFaceColor','b');
157         xlim([0,N/2]);
158         title('\bf P');
159     subplot(2,3,6)

```

```

160     plot(1:level,PW,'s','MarkerFaceColor','b'), title('\bf P');
161     xlim([0,level+1]);
162
163     suptitle(['\bf X, DFT, per DFT and DWT, per DWT with wavelet },wavelet,...
164             '\bf for serie },serie]);
165
166     display('Pulse una tecla...');
167     pause;
168     close;
169
170     C = boundary_coefficients(N,L,level);
171     suptitle(['\bf X, DWT Details, Smooths and Roughs with wavelet },wavelet]);
172     for i=1:level
173         subplot(level+1,3,3*i-2)
174             plot(0:N-1,D(level-i+1,:), 'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
175             xlim([0,N]);
176             xl = xlim; yl = ylim;
177             hold on;
178             plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
179                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
180             plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
181                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
182             hold off;
183             str = ['\bf D_',int2str(level-i+1),''];
184             title(str,'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
185         subplot(level+1,3,3*i-1)
186             plot(0:N-1,S(level-i+1,:), 'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
187             xlim([0,N]);
188             xl = xlim; yl = ylim;
189             hold on;
190             plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
191                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
192             plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
193                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
194             hold off;
195             str = ['\bf S_',int2str(level-i+1),''];
196             title(str,'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
197         subplot(level+1,3,3*i)
198             plot(0:N-1,R(level-i+1,:), 'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
199             xl = xlim; yl = ylim;
200             hold on;
201             plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
202                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
203             plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle','--',...
204                 'LineWidth',1.5,'Color','r');
205             hold off;
206             xlim([0,N]);
207             str = ['\bf R_',int2str(level-i+1),''];
208             title(str,'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
209     end
210     subplot(level+1,3,3*level+1)
211     plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
212     xlim([0,N]);
213     xl = xlim; yl = ylim;

```

```

214         title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
215     subplot(level+1,3,3*level+2)
216         plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
217         xlim([0,N]);
218         xl = xlim; yl = ylim;
219         title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
220     subplot(level+1,3,3*level+3)
221         plot(0:N-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
222         xlim([0,N]);
223         xl = xlim; yl = ylim;
224         title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
225
226     if (N>32)
227         set(findobj('Marker','s'),'Marker','none');
228     end
229     display('Pulse una tecla...');
230     pause;
231     close;
232
233 end

```

A.4.3. Rutina de control.

Esta rutina es la que invoca a las demás del capítulo con el fin de preparar la ejecución con los datos particulares que se precisan para el almacenamiento de las tablas de datos en fichero necesarias para construir las gráficas.

```

----- capitulo_4.m -----
1
2 % Cargamos el paquete WMTSA
3 run /usr/local/matlab7/toolbox/wmtsa/startup.m
4
5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ejemplos ilustrativos %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
6 % Ubicación: Ejemplos. Ejemplos ilustrativos.
7 clear;
8
9 series = {};%{'sumsin','breakdown','whitenoise','normalnoise','step','triangle'};
10 levels = [5 4 4 4 5 6];
11
12 for i=1:length(series)
13     [x,F,PF,W,PW,DW,SW,RW] = ejemplos_introductorios(series{i},levels(i));
14     % Guardamos los resultados.
15     % Serie
16     N = length(x);
17     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=x;
18     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/',series{i},'.dat'],X,'delimiter',' ',...
19             'precision','%.4f');
20     % Transformada de Fourier
21     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=real(F);
22     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/F',series{i},'.re.dat'],X,'delimiter',' ',...
23             'precision','%.4f');
24     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=imag(F);
25     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/F',series{i},'.im.dat'],X,'delimiter',' ',...

```

```

26         'precision', '%.4f');
27     % Periodograma de Fourier
28     if (strcmp(series{i}, 'whitenoise'))
29         PF = 7.5*PF;
30     end
31     clear X; X(:,1)=1:N/2; X(:,2)=PF;
32     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/PER', series{i}, '.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
33             'precision', '%.4f');
34     % Transformada wavelet
35     clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=W;
36     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/T', series{i}, 'LA.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
37             'precision', '%.4f');
38     % Periodograma wavelet
39     clear X; X(:,1)=1:levels(i); X(:,2)=PW;
40     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/PERW', series{i}, 'LA.dat'], X, 'delimiter', ' ', ...
41             'precision', '%.4f');
42
43     % Detalles y componentes suaves
44     for k=1:levels(i)
45         clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=DW(k,:);
46         dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/D', int2str(k), series{i}, 'LA.dat'], ...
47                 X, 'delimiter', ' ', 'precision', '%.4f');
48         clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=SW(k,:);
49         dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/A', int2str(k), series{i}, 'LA.dat'], ...
50                 X, 'delimiter', ' ', 'precision', '%.4f');
51     end
52
53 end
54
55
56 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ejemplos reales %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
57 %%% Ubicación: Ejemplos. Ejemplos reales.
58 %%% Serie: heart
59 clear;
60 serie = 'heart';
61 level = 6;
62 boundary = 'periodic';
63 wavelets = {'haar' 'd4' 'c6' 'la8'};
64 suffixs = {'H' 'D' 'C' 'LA'};
65
66 x = load(['../series/originales/', serie, '.dat']);
67 N = length(x);
68
69 % Serie
70 clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=x;
71 dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/', serie, '.dat'], X, 'delimiter', ' ', 'precision', '%.4f');
72
73 for i=1:length(wavelets)
74
75     wavelet = wavelets{i};
76     [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x, wavelet, level, boundary);
77
78     % Transformada
79     clear X; X(:,1)=0:N-1; X(:,2)=W;

```

```

80     dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/',serie,suffixs{i}],' .dat'],X,'delimiter',' ','precision','% .4f');
81
82     % Detalles y aproximaciones
83     for j=1:level
84         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=D(j,:);
85         dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/D',int2str(j),serie,suffixs{i}],' .dat'],X,...
86             'delimiter',' ','precision','% .4f');
87         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=S(j,:);
88         dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/A',int2str(j),serie,suffixs{i}],' .dat'],X,...
89             'delimiter',' ','precision','% .4f');
90     end
91 end
92
93 %%% Serie: esignal
94 clear;
95 serie = 'esignal';
96 level = 6;
97 boundary = 'periodic';
98 wavelet = 'la8';
99 suffix = 'LA';
100
101 x = load(['../series/originales/',serie,'.dat']);
102 N = length(x);
103
104 periods      = {' ' 'MidDay' 'EndNight'};
105 lower_limits = [ 1  2200  1500];
106 upper_limits = [ N  3700  1800];
107
108 [W, D, S, R, P] = DWT_MRA(x,wavelet,level,boundary);
109
110 for i=1:length(periods)
111     % Serie
112     clear X;
113     X(:,1)=lower_limits(i)-1:upper_limits(i)-1;
114     X(:,2)=x(lower_limits(i):upper_limits(i));
115     dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/',serie,periods{i}],' .dat'],X,'delimiter',' ','...
116         'precision','% .4f');
117
118     % Detalles y aproximaciones
119     for j=1:level
120         clear X;
121         X(:,1)=lower_limits(i)-1:upper_limits(i)-1;
122         X(:,2)=D(j,lower_limits(i):upper_limits(i));
123         dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/D',int2str(j),serie,periods{i},suffix,'.dat'],X,...
124             'delimiter',' ','precision','% .4f');
125         clear X;
126         X(:,1)=lower_limits(i)-1:upper_limits(i)-1;
127         X(:,2)=S(j,lower_limits(i):upper_limits(i));
128         dlmwrite(['../series/DWT_ejemplos/A',int2str(j),serie,periods{i},suffix,'.dat'],X,...
129             'delimiter',' ','precision','% .4f');
130     end
131 end

```

A.5. Transformada wavelet discreta de máximo solapamiento.

A.5.1. Análisis detallado y componentes suaves/rugosas MODWT.

Esta función devuelve la transformada, el análisis detallado, las componentes suaves y las componentes rugosas con el análisis MODWT de una serie. Se emplea para la construcción de las gráficas correspondientes a la sección 5.7.

```

1 function [W, D, S, R, P] = MODWT_MRA(x,wavelet,level,boundary,graph_status)
2 % NAME
3 % DWT_MRA -- Returns:
4 %             MODWT, Details, Smooths and periodogram of x
5 %
6 % USAGE
7 % [W, D, S, R, P] = MODWT_MRA(x,wavelet,[level],[boundary],[graph_status]);
8 %
9 % INPUTS
10 % x           = serie (it must have a power of 2 of elements)
11 % wavelet     = WMTSA wavelet to do the DWT MRA
12 % level       = Number of stages [default: log2(length(x))]
13 % boundary    = boundary method: periodic or reflection
14 % graph_status = graphics (default: on)
15 %
16 %
17 % OUTPUTS
18 % W           = 1xN vector array with DWT of x
19 % D           = levelxN array with details of x
20 % S           = levelxN array with smooths of x
21 % R           = levelxN array with roughs of x
22 % P           = 1xlevel vector array with periodogram of x
23 %
24 % EXAMPLES
25 %   DWT_MRA([1 2 3 4], 'la8');
26 %   DWT_MRA([1 2 3 4], 'la8', 2, 'reflection', 'off');
27
28 usage_str = ['Usage: [W,D,S,R,P] = ', mfilename, '(x,wavelet,[level],[boundary],[graph_status)'];
29
30 [err, errmsg] = nargerr(mfilename, nargin, [2:5], nargout, [0:5]);
31 if (err)
32     error('WMTSA:InvalidNumArguments',[usage_str]);
33 end
34
35 n = length(x);
36
37 % Check for valid wavelet and get wavelet filter coefficients
38 try
39     [ht, gt, L, name] = modwt_filter(wavelet);
40 catch
41     disp([mfilename, ': Error creating modwt filter']);
42     rethrow(lasterror);
43 end
44

```

```

45 if (~exist('level','var')||isempty(level))
46     level = log2(n);
47 end
48
49
50 if (~exist('graph_status','var')||isempty(graph_status))
51     graph_status = 'on';
52 end
53
54 if (~exist('boundary','var')||isempty(boundary))
55     boundary = 'periodic';
56 end
57
58
59 % Calculamos las transformada y componentes suaves.
60 for i=1:level
61     [W,V(:,i)] = modwt(x,wavelet,i,boundary);
62     S(:,i) = imodwt_smooth(V(:,i),wavelet,i);
63 end
64
65 % Calculamos los detalles
66 D = imodwt_details(W,wavelet);
67
68 % Calculamos las componentes rugosas.
69 vaux = D(:,1);
70 R(:,1) = vaux;
71 for i=2:level
72     vaux = vaux + D(:,i);
73     R(:,i) = vaux;
74 end
75
76 W = W';
77 V = V';
78 D = D';
79 S = S';
80 R = R';
81
82
83 % Calculamos el periodograma.
84 for i=1:level
85     P(i) = 1/n*norm(W(i,:))^2;
86 end
87
88
89 % Pintamos resultados
90 if (strcmp(graph_status,'on'))
91     % Calculamos los coeficientes frontera
92     [C(:,1) C(:,2)] = modwt_cir_shift_wcoef_bdry(wavelet,n,level);
93
94     subplot(level+1,2,2*level+1)
95     plot(0:n-1,x,'Marker','s','MarkerSize',4,'MarkerFaceColor','b');
96     xlim([0,n]);
97     xl = xlim; yl = ylim;
98     title('\bf X','Position',[xl(2)+(xl(2)-xl(1))/20 .7*yl(1)+.3*yl(2) 0]);

```

```

99     for i=1:level
100         subplot(level+1,2,2*level+1-2*i)
101             plot(0:n-1,W(i,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
102             set(gca, 'XTickLabel', {' '});
103             xlim([0,n]);
104             xl = xlim; yl = ylim;
105             if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
106                 hold on;
107                 plot([C(i,1) C(i,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
108                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
109                 plot([C(i,2) C(i,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
110                     'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
111                 hold off;
112             end
113             str = ['\bf W_{', int2str(i), '}'];
114             title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/20 .7*yl(1)+.3*yl(2) 0]);
115         end
116         if (n>32)
117             set(findobj('Marker', 's'), 'Marker', 'none');
118         end
119         subplot(level+1,2,[6:2:2*(level+1)])
120             plot(1:level,P, 's', 'MarkerFaceColor', 'b'), title('\bf P');
121             xlim([0,level+1]);
122             title('\bf P');
123         suptitle(['\bf X, MODWT and periodogram with wavelet ', wavelet, '']);
124         display('Pulse una tecla...');
125         pause;
126         close;
127
128         % Calculamos los coeficientes frontera
129         [C(:,1) C(:,2)] = modwt_cir_shift_mra_bdry(wavelet,n,level);
130
131         for i=1:level
132             subplot(level+1,3,3*i-2)
133                 plot(0:n-1,D(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
134                 xlim([0,n]);
135                 xl = xlim; yl = ylim;
136                 if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
137                     hold on;
138                     plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
139                         'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
140                     plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [yl(1) yl(2)], 'LineStyle', '--', ...
141                         'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
142                     hold off;
143                 end
144                 set(gca, 'XTickLabel', {' '});
145                 str = ['\bf D_', int2str(level-i+1), ''];
146                 title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*yl(1)+.5*yl(2) 0]);
147             subplot(level+1,3,3*i-1)
148                 plot(0:n-1,S(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
149                 xlim([0,n]);
150                 xl = xlim; yl = ylim;
151                 if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
152                     hold on;

```

```

153         plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
154             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
155         plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
156             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
157         hold off;
158     end
159     set(gca, 'XTickLabel', {' '});
160     str = ['\bf S_', int2str(level-i+1), ''];
161     title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
162     subplot(level+1,3,3*i)
163     plot(0:n-1,R(level-i+1,:), 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
164     xlim([0,n]);
165     xl = xlim; yl = ylim;
166     if (C(:,1)<n)&(C(:,2)>0)&(C(:,1)<C(:,2))
167         hold on;
168         plot([C(level-i+1,1) C(level-i+1,1)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
169             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
170         plot([C(level-i+1,2) C(level-i+1,2)], [y1(1) y1(2)], 'LineStyle', '--', ...
171             'LineWidth', 1.5, 'Color', 'r');
172         hold off;
173     end
174     set(gca, 'XTickLabel', {' '});
175     str = ['\bf R_', int2str(level-i+1), ''];
176     title(str, 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
177     end
178     subplot(level+1,3,3*level+1)
179     plot(0:n-1,x, 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
180     xlim([0,n-1]);
181     xl = xlim; yl = ylim;
182     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
183     subplot(level+1,3,3*level+2)
184     plot(0:n-1,x, 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
185     xlim([0,n-1]);
186     xl = xlim; yl = ylim;
187     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
188     subplot(level+1,3,3*level+3)
189     plot(0:n-1,x, 'Marker', 's', 'MarkerSize', 4, 'MarkerFaceColor', 'b');
190     xlim([0,n-1]);
191     xl = xlim; yl = ylim;
192     title('\bf X', 'Position', [xl(2)+(xl(2)-xl(1))/8 .5*y1(1)+.5*y1(2) 0]);
193
194     suptitle(['\bf X, MODWT Details, Smooths and Roughs with wavelet ', wavelet, '']);
195
196     if (n>32)
197         set(findobj('Marker', 's'), 'Marker', 'none');
198     end
199     display('Pulse una tecla...');
200     pause;
201     close;
202 end;

```

A.5.2. Rutina de control.

Esta rutina es la que invoca a las demás del capítulo con el fin de preparar la ejecución con los datos particulares que se precisan para el almacenamiento de las tablas de datos en fichero necesarias para construir las gráficas.

```

1      % Cargamos el paquete WMTSA
2      run /usr/local/matlab7/toolbox/wmtsa/startup.m
3
4      %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Serie bump %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
5      % Ubicación: Efecto de las traslaciones circulares en la DWT.
6
7      clear;
8
9      wave = 'la8';
10     suffix = 'LA';
11     level = 4;
12     n = 128;
13
14     MW = basisDWT(n,wave,level);
15
16     series = {'bump','bumpT'};
17     for k=1:length(series)
18         serie = series{k};
19         [x,F,PF,W,PW,D,S,R]=ejemplos_introductorios(serie,level,n,wave);
20         s{k} = x;
21         % Guardamos en fichero.
22
23         % Serie
24         clear X;X(:,1)=0:n-1;X(:,2)=x;
25         dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/' ,serie,'.dat'],X,'delimiter',' ','...
26                 'precision','%.4f');
27         % Transformada wavelet
28         clear X;X(:,1)=0:n-1;X(:,2)=W;
29         dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/T' ,serie,suffix,'.dat'],X,'delimiter',' ','...
30                 'precision','%.4f');
31
32
33         for i=1:level
34             clear X;X(:,1)=0:n-1;X(:,2)=D(i,:);
35             dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/D' ,int2str(i),serie,suffix,'.dat'],X,...
36                     'delimiter',' ','precision','%.4f');
37         end
38         clear X;X(:,1)=0:n-1;X(:,2)=S(level,:);
39         dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/A' ,int2str(level),serie,suffix,'.dat'],X,...
40                 'delimiter',' ','precision','%.4f');
41     end
42
43     % Guardamos en fichero los vectores basicos de la transformación DWT cuyo producto con X
44     % dé los coeficientes W_4,4; W_4,5; W_4,6; W_4,7 y los pintamos.
45     for i=1:4
46         row = MW(116+i,:);
47         subplot(2,4,i)
48         plot(0:n-1,row,'Color','r');

```

```

49     xlim([0,n]);
50     hold on;
51     plot(0:n-1,s{1});
52     hold off;
53     title(['\bf W_{4, 'int2str(i+3),'}']);
54     subplot(2,4,i+4)
55     plot(0:n-1,row,'Color','r');
56     xlim([0,n]);
57     hold on;
58     plot(0:n-1,s{2});
59     hold off;
60
61     clear X;X(:,1)=0:n-1;X(:,2)=row;
62     dlmwrite(['../series/ejemplos_introductorios/W4',int2str(i+3),'bump.dat'],X,'delimiter',...
63             ' ','precision', '%.4f');
64 end
65
66 display('Pulse una tecla...');
67 pause;
68 close;
69
70 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Ejemplos reales %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
71 %%% Ubicación: Ejemplos. Ejemplos reales.
72 clear;
73 series = {'heart' 'sealevel' 'nile'};
74 levels = [6 7 4];
75 boundary = 'periodic';
76 wavelet = 'la8';
77 suffix = 'LA';
78
79 for i=1:length(series)
80     serie = series{i};
81     x = load(['../series/originales/',serie,'.dat']);
82     N = length(x);
83
84     % Serie
85     clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=x;
86     dlmwrite(['../series/MODWT_ejemplos/',serie,'.dat'],X,'delimiter',' ','precision', '%.4f');
87
88     [W, D, S, R, P] = MODWT_MRA(x,wavelet,levels(i),boundary);
89
90     % Detalles y aproximaciones
91     for j=1:levels(i)
92         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=D(j,:);
93         dlmwrite(['../series/MODWT_ejemplos/D',int2str(j),serie,suffix,'.dat'],X,...
94                 'delimiter',' ','precision', '%.4f');
95         clear X;X(:,1)=0:N-1;X(:,2)=S(j,:);
96         dlmwrite(['../series/MODWT_ejemplos/A',int2str(j),serie,suffix,'.dat'],X,...
97                 'delimiter',' ','precision', '%.4f');
98     end
99 end

```


Bibliografía

- [1] P.. Bloomfield. *Fourier Analysis of Time Series, An Introduction*. Wiley-Interscience., 2000.
- [2] A. G. Bruce and H. Y. Gao. *Applied Wavelet Analysis with S-PLUS*. New York: Springer, 1996.
- [3] B. Cascales Salinas, P. Lucas Saorín, J. M. Mira Ros, A .J. Pallarés Ruiz, and S. Sánchez-Pedreño Guillén. *El libro de L^AT_EX* . Pearson-Prentice Hall, 2003.
- [4] I. Daubechies. *Ten Lectures On Wavelets*. Philadlephia: SIAM, 1992.
- [5] S. G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet ortonormal bases of $L^2(R)$. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989.
- [6] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: The wavelet representation. *IEEE. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989.
- [7] M. Misti, Y. Misti, G. Oppenheim, and Poggi J-M. Wavelet toolbox for use with MATLAB[®]. Documentación del programa MATLAB[®], July 2004.
- [8] D. B. Percival and A. T. Walden. *Wavelet Methods for Time Series Analysis*. Cambridge, 2000.
- [9] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and Filters Banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [10] M. Vetterli and J. Kovacevic. *Wavelets and Subband Coding*. Prentice Hall, 1995.