Análisis Matemático I
Curso 2004/05 - Convocatoria de Febrero - 1ª Convocatoria

Alumno: _____

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

- (a) Si una función es continua en un punto x_0 , sabemos que existe un entorno de dicho punto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, donde la imagen de la función en todos los puntos de este entorno se parece mucho al valor de la función en x_0 , esto es, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. ¿Es continua en todo punto de dicho entorno?
- (b) Si $f(x)$ está definida de forma biyectiva de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, como toma todos los valores del intervalo, necesariamente es continua. ¿Cierto o falso?
- (c) Dar un ejemplo de función derivable en todo $\mathbb{R}$ cuya derivada no sea continua.
- (d) Si f es derivable en un intervalo y creciente, entonces $f'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. ¿Cierto o falso?
- (e) Sea f una función definida en $[0, 1]$ que es derivable en todo punto y su derivada no se anula en ningún punto. ¿Qué podemos decir de sus máximos o mínimos en dicho intervalo?

2. Sea f una función derivable en un entorno $[a, b]$ tal que $f'(a^+) < 0$ y $f'(b^-) > 0$. Probar que existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. ¿Es c un extremo de la función?

3. Probar por inducción que

$$6(1 + 7 + \dots + 7^n) + 1 = 7^{n+1}$$

4. a) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ x - \frac{x^3}{6} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y derivabilidad de f . ¿Cuántas veces es derivable en el 0? Dar una idea aproximada de su gráfica.

5. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

6. Una caja rectangular sin tapa con base cuadrada tiene un volumen de 500 cm^3 . Determinar las dimensiones que minimizan el área total de su base y los cuatro lados.

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.