

Análisis Matemático I

Curso 2005/06 - Convocatoria de junio

Alumno: _____

1. Contestar razonadamente las siguientes cuestiones:

- a) Si una función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo un único punto a , necesariamente esa discontinuidad es evitable. ¿Cierto o falso?
- b) Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para todo x . ¿Es f continua en $x = 0$?
- c) Sea f una función acotada en todo entorno del origen. Se sabe que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)f(x)$ existe y es finito. Como ambas funciones son acotadas en el origen, necesariamente $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe y es finito. ¿Cierto o falso?
- d) Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo en el supremo e ínfimo del intervalo, respectivamente. ¿Cierto o falso?
- e) Si alguna derivada lateral de una función f en un punto a es infinito, entonces necesariamente la imagen de la función en dicho punto $f(a)$ también es infinito, como pasa con la función $f(x) = 1/x$ en $a = 0$. ¿Cierto o falso?

2. Razonar detalladamente las siguientes cuestiones:

- a) Sea $P(x)$ un polinomio. Estudiar la existencia o no de máximos y mínimos de la función $|P(x)|$. Calcular su valor en el caso que sea posible.
- b) Aplicando L'Hopital se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{-2 \cos x \sin x} = -1.$$

Comenta la veracidad o falsedad de este razonamiento.

3. a) Calcular las soluciones de

$$||x + 1| - |x - 1|| < 1$$

b) Estudiar el límite cuando $x \rightarrow 0$ de

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

4. Probar que la ecuación $x^2 = x \sin x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

5. Estudiar y representar gráficamente $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} - x$

6. Se desea construir una caja sin tapa con una cartulina de 46x10cm cortando en sus esquinas cuatro cuadrados iguales y doblando los lados. Hallar el lado x de esos cuadrados que hace máximo el volumen de la caja.

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.