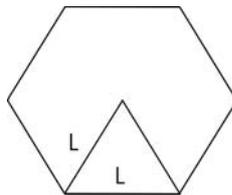


Análisis Matemático I
Curso 2006/07 - Convocatoria de Febrero - 1ª Convocatoria

Alumno: _____

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:
 - a) Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto que admite supremo $m = \sup M < \infty$. Si M tiene un número finito de elementos entonces $m \in M$, y si M es infinito entonces podemos asegurar que existe una sucesión $\{x_n\} \subset M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$. ¿Cierto o falso?
 - b) Sea $f(x)$ una función que admite límite y es finito en un punto a y $g(x)$ una función que es acotada en un entorno de a y $g(a) = 0$. Entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ existe. ¿Cierto o falso?
 - c) Sea f una función definida en $[0, 1]$ que verifica $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. Si f es continua entonces f es constante. ¿Cierto o falso?
 - d) ¿Puede existir una función f que verifique $f(a) < \infty$ y $f'(a^+) = f'(a^-) = +\infty$?
 - e) Si $p(x)$ es un polinomio de grado impar, entonces siempre tiene al menos una raíz. ¿Cierto o falso?
2. a) Probar que para todo número real a podemos construir una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ verificando:
 - i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ii) $x_{2n} \in \mathbb{Q}$ y $x_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
 - iii) $x_2 < x_4 < x_6 < \dots < x_{2n} < \dots < a < \dots < x_{2n+1} < \dots < x_5 < x_3 < x_1$
 - iv) $|x_n - a| < 10^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.b) Sea f una función derivable hasta orden 3 en un intervalo $[a, b]$ con $f'(a) = 0$. Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\frac{f(b) - f(a)}{(b-a)^2} = \frac{1}{2}f''(c).$$
3. a) Probar que $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
b) Estudiar los límites laterales en $x = 0$ de la función $f(x) = \frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$.
4. Probar que la ecuación $\ln x = x - 4$ tiene exactamente dos soluciones y encontrar para cada una, un intervalo de longitud 0,5 donde se encuentre.
5. a) Dar la expresión general de las gráficas de las funciones $f(x) = x^{p/q}$ para $0 < p/q < 1$ y p, q impares.
b) Estudiar y representar gráficamente $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$
6. Se utilizan 20m de hilo para formar un cuadrado y un hexágono regular. ¿Cuánto hilo hay que usar en cada uno para que el área total encerrada sea máxima?



NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.