Análisis Matemático I
Curso 2006/07 - Convocatoria de Febrero - 2^a Convocatoria

Alumno: ____________________

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

   a) Se sabe que las funciones f y g verifican que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$ y además $f(x) < g(x)$ en todos los puntos de un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ del punto a. Entonces $l < m$. ¿Cierto o falso?

   b) Sea f una función definida en un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ de un punto a. Se sabe que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$ para cierta sucesión $\{x_n\} \subset (a-\delta, a+\delta)$ con $x_n \to a$. Entonces $f(a)$=0. ¿Cierto o falso?

   c) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen} x}$?

   d) Si f y g son dos funciones discontinuas en todo punto de $\mathbb{R}$, entonces $f \circ g$ es también discontinua. ¿Cierto o falso?

   e) Sean f y g dos funciones que verifican $f(x_0) = g(x_0)$ y $f'(x_0) = g'(x_0)$, esto es, en x_0 tienen la misma recta tangente. Entonces necesariamente las dos son cóncava o convexa en x_0 simultáneamente. ¿Cierto o falso?

2. a) Se sabe que f una función derivable en (a, b) y verifica $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Probar que $f'(x)$ se anula en al menos un punto de (a, b).

   b) Probar que para todo $x > 0$ existe $c \in (0, x)$ tal que

   $$x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 2c \operatorname{sen} \frac{1}{c} - \cos \frac{1}{c}$$

   Deducir de la identidad anterior que $\lim_{c\to 0} \cos \frac{1}{c} = 0$. ¿Prueba este hecho que $\lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x} = 0$?

3. a) Calcular las soluciones de $|x+2| - |x-1| < 2$

   b) Calcular $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + senx}{e^x - senx}$

4. Demostrar que $x^5 + 4x + 1 = 0$ tiene una única solución y dar un intervalo de longitud $\dfrac{1}{4}$ donde se encuentre.

5. Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} + arctg(x)$

6. Se quiere construir un recipiente de volumen constante formado por un cilindro rematado por una semiesfera. Hallar las dimensiones de dicho recipiente para que tenga la menor superficie.

   NOTA: Superficie y volumen de la esfera de radio r: $S = 4\pi r^2$, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.