

Análisis Matemático I
Curso 2006/07 - Convocatoria de Junio -

Alumno: _____

1. Contestar de forma razonada las siguientes cuestiones:

- a) Toda función creciente en un intervalo, al admitir límites laterales en cada punto, se sigue que necesariamente es continua. ¿Cierto o falso?
- b) Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto que admite supremo $m = \sup M < \infty$. Si M tiene un número finito de elementos entonces $m \in M$, y si M es infinito entonces podemos asegurar que existe una sucesión $\{x_n\} \subset M$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$. ¿Cierto o falso?
- c) f es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ que verifica en un punto $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ y $f^{(k)}(x_0) = 0$ para las restantes derivadas $k > n + 1$. Entonces necesariamente f tiene un máximo o un mínimo en x_0 . ¿Cierto o falso? En caso de ser cierto dar un ejemplo de una función que lo cumpla.
- d) En un punto a se sabe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen lo siguiente:
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ existe y es finito
 - $f(x)$ es continua en a
 - $g(x)$ es acotada en todo entorno de a y $g(a) = 0$

¿Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en a ? ¿o al menos que tiene una discontinuidad evitable?

2. a) Probar que para todo número real a podemos construir una sucesión $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ verificando:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, ii) $x_{2n} \in \mathbb{Q}$ y $x_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- iii) $x_2 < x_4 < x_6 < \dots < x_{2n} < \dots < a < \dots < x_{2n+1} < \dots < x_5 < x_3 < x_1$
- iv) $|x_n - a| < 10^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Se sabe que $f(x)$ es una función continua y derivable en un intervalo $[a, b]$, entendiendo en los extremos que existe la derivada lateral correspondiente. Por ser continua ya se sabe que admite unos valores máximos y mínimos en dicho intervalo.

- i) Si estos máximos y mínimos no se alcanzasen en ninguno de los puntos extremos del intervalo, ni en a ni en b , entonces necesariamente $f'(x)$ se anularía en al menos dos puntos de (a, b) . ¿Cierto o falso? Justifica tu respuesta.
- ii) Si el máximo o el mínimo se alcanzase en a o en b , ¿se anularía también la derivada (lateral) en estos puntos? Probarlo en caso afirmativo o dar un contraejemplo en caso negativo.
- iii) Dar condiciones sobre $f'(a^+)$ y sobre $f'(b^-)$ que aseguren que los máximos y mínimos de f se encuentran todos en (a, b)

3. a) Calcular las soluciones de

$$|x + 2| + |x - 2| \leq 12$$

- b) Estudiar, según los valores de α , la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

4. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.
5. Estudiar y representar gráficamente

$$f(x) = (x - 1)x^{\frac{2}{3}}$$

6. Un tanque industrial se forma juntando dos semiesferas a los extremos de un cilindro y debe contener $30m^3$. Si el costo de fabricación de las semiesferas es por m^2 el doble que el del lateral. Determinar las dimensiones que minimizan el coste.

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.