Análisis Matemático I
Curso 2005/06 - Convocatoria de Febrero - 1^a Convocatoria

Alumno: ______________________________________

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

   a) Probar que para cualesquiera $x, y \in R$ se tiene que
   $$\max(x,y) = \frac{x+y+|y-x|}{2}.$$

   b) Dada f una función continua en un intervalo $[a,b]$ y $f(a) < k < f(b)$. Se sabe que el conjunto $M = \{x \in [a,b] : f(x) < k\}$ admite supremo $c = \sup M$. ¿Es cierto entonces que $f(c) < k$?.

   c) Supóngase que f es continua en $[a,b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

   d) Deducir el Teorema de Rolle a partir del Teorema del Valor Medio.

   e) Se sabe que f verifica $f''(x_0) = 0$ en un determinado punto, entonces necesariamente $f''(x)$ cambia de signo al pasar por x_0, o lo que es lo mismo, f pasa de cóncava a convexa o viceversa. ¿Cierto o falso?

2. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

   i) $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$,

   ii) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

   Probar que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3. a)Probar por inducción que
   $$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

   b)Calcular
   $$\lim_{x\to k}\left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\frac{x}{k}}$$

4. Probar que la ecuación $e^{-x} = x^3 + 2$ tiene exactamente una solución.

5. Representar gráficamente la función $f(x) = \sqrt{(x^2+1)} - 4\operatorname{arc\,tg}(x)$

6. Necesitamos diseñar una lata cilíndrica con radio r y altura h. La base y la tapa deben hacerse de cobre, con un costo de 2 céntimos por cm^2. La parte lateral se hace de aluminio, que cuesta 1 céntimo por cm^2. Buscamos las dimensiones que maximicen el volumen de la lata. La única restricción es que el costo total de la lata sea 300π céntimos.

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.