Análisis Matemático I
Curso 2005/06 - Convocatoria de Febrero - 2^a Convocatoria

Alumno: ____

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

   a) Toda sucesión convergente de números racionales lo hace necsariamente a otro número racional. ¿Cierto o falso? Dar un ejemplo en caso contrario.

   b) ¿Existe alguna función f continua únicamente en los enteros?

   c) Toda función derivable es continua, luego si una función amite derivada en todo punto, dicha derivada es también continua en todo punto. ¿Cierto o falso?

   d) Dar un ejemplo de un intervalo $[a, b]$ y de una función f definida en él donde además de verificarse el Teorema del Valor Medio puedas dar exactamente el punto $c \in (a, b)$ donde se verifica.

   e) Toda función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ sabemos que admite máximo y mínimo (Teorema de Weiertrass). ¿Si es derivable se tiene entonces necesariamente que su derivada se anula al menos en dos puntos (su máximo y su mínimo)?

2. Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$ verificando que
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0.$$
Dar una condición sobre n de forma que la ecuación $x^n + f(x) = 0$ admita al menos una raíz real. Justifica todos los pasos de tu razonamiento.

3. a) Calcular las soluciones de
$$|x + 2| + |x - 2| \leq 12$$
b) Calcular
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - senx}$$

4. a) Demostrar que $x^2 = 18 \ln x$ tiene una única solución en $(1, e)$

   b) Probar haciendo uso del cálculo diferencial la identidad: $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x$.

5. Representar gráficamente la función
$$f(x) = \frac{e^{(1/x)}}{\ln(x^2)}$$
.

6. Un alambre de 100cm de longitud se corta en dos partes. Una parte se dobla para formar un circulo y la otra para un cuadrado. ¿Dónde debe hacerse el corte para maximizar la suma de las áreas del cuadrado y el circulo? ¿Para minimizar dicha suma?

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.