ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007.

Tema 1. Números reales.

Guía del tema y tareas a realizar

Este documento tiene como objetivo servir de guía para estudiar y asimilar lo contenidos del Tema 1 de la asignatura de Análisis Matemático I. Te ayudará a saber los elementos fundamentales y además te asignará las tareas a llevar a cabo para su evaluación

1.- Lo que contiene este tema y lo que no debo dejar de saber

De forma esquemática, el Tema 1 de Números Reales ha abordado los siguientes contenidos:

- **Propiedades de los números racionales $\mathbb{Q}$.**

  Vimos su estructura de cuerpo ordenado, denso, arquimediano y que es infinito numerable. Debemos conocer estos conceptos y saber cómo se prueban. Aprendimos el Principio de Inducción para probar relaciones (identidades principalmente) entre números racionales (Ejercicio 1). Debemos tener claro este método de resolución de problemas.

- **Insuficiencia de $\mathbb{Q}$ para medir nuestro entorno.**

  Sabemos cómo encontrar números irracionales en nuestro entorno: haciendo raíces cuadradas, por construcciones geométricas, etc. Sabemos cómo probar que $\sqrt{2}$ no es racional, con una argumento que podemos trasnportar a otros ejemplos ($\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,...).

  Debemos tener claro hasta dónde podemos trabajar con $\mathbb{Q}$, teniendo presente casos donde aparecen números irracionales de forma natural como límite de sucesiones de núeros racionales (Ejercicios 8 al 11). Debes saber cómo construir sucesiones de racionales que aproximen a números irracionales, esto es, *"el límite se sale de $\mathbb{Q}$"*. Todo esto nos justifica la necesidad de definir un *"conjunto de números más grande"*, el de los números reales $\mathbb{R}$.

- **Definición axiomática del conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.**

  Después de intuir que hay más números que los racionales, hemos definido el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ por medio de tres axiomas. Debemos conocerlos bien y entender lo que determinan y su origen en base al estudio que hemos hecho de $\mathbb{Q}$

  A partir de los axiomas de definición de $\mathbb{R}$ hemos abordado las siguientes cuestiones:

  - Probamos la Propiedad Arquimediana, la existencia de la parte entera de todo real y la densidad de los racionales y los irracionales. Las demostraciones de estas propiedades forman una cadena donde los axiomas de definición de $\mathbb{R}$ son la base, pero que cada una ayuda a determinar la siguiente. Es muy importante que entiendas los pasos de cada una, cómo se utilizan los resultados previos y qué argumentos son los que más se repiten.

- Vimos la representación decimal de los números reales, a partir de su estrecha relación con los números racionales.
- Definición de la recta real y sus subconjuntos básicos, los intervalos. La relación ”ser menor quez la definición de valor absoluto nos permite pasar de resolver ecuaciones (que sabemos resolver muy pocas) a resolver inecuaciones. Estas inecuaciones basan su sentido en la estructura de la recta real, sus soluciones son subconjuntos de dicha recta real (puntos, intervalos, semirectas). Los Ejercicios 2, 3, 4, 5, 6 y 7 te ayudarán a entrenarte en este tipo de problemas. Debemos saber desenvolvernos con desigualdades polinómicas.

  El Principio de los Intervalos Encajados nos muestra resultados sobre sucesiones de intervalos. Hay que tener claro cuáles y dónde se utilizan los axiomas de $\mathbb{R}$ en la prueba de este resultado. Este resultado será uno de los más utilizados en el curso. Debes entender que su prueba es esencialemente la forma que más se utiliza para aplicarlo.
- **Conceptos de supremo e ínfimo de un conjunto.**

  Debemos saber su definición, caracterización y el Axioma del Supremo. Conocer la prueba de estos resultados es una gran herramienta para probar otros resultados similares.

2.- Tareas para trabajar el tema

Las siguientes cuestiones buscan motivar el estudio de este Tema 1, potenciar tu espíritu crítico y que abordes su contenido con una actitud activa y no te limites a una simple lectura comprensiva, esto es, intentando que no digas la frase standar *“entiendo lo que leo pero no sé cómo utilizarlo”*. Parte de este trabajo lo aborda la hoja de problemas propuesta, pero te presentamos aquí cuestiones más relacionadas con el desarrollo teórico expuesto en clase. En general, el libro de texto del curso y la bibliografía complementaria pueden ser de gran ayuda para abordarlas.

Una de las principales novedades en las materias del curso es la relevancia, e importancia, de las demostraciones de los resultados que se presentan. La primera tendencia del estudiante es aprender de memoria estas demostraciones con la idea de que van a ser preguntadas como quien recita una poesía. Debes tener presente que, al igual que la poesía, la belleza de la demostración radica en su significado, en como se engarzan las ideas para llegar a una conclusión, qué papel juegan las hipótesis y en qué preciso momento son necesarias, qué formato de demostración se utiliza (directa, por contrarecíproco, por reducción al absurdo, etc.), todos estos elementos deben centrar tu atención sobre una demostración antes que simplemente saber “recitar” los pasos de la misma, y no reflexionar por qué es esa la secuencia de pasos que hay que seguir.

En muchas de las cuestiones que te propondremos a lo largo del curso buscaremos esta reflexión sobre las demostraciones, por medio de varias vías donde no seas un simple espectador. Una forma será pidiéndote que revises y aclares pasos precisos, bien extrayendo alguna conclusión intermedia de una demostración y te la propongamos como una resultado por si mismo relevante, o bien otras serán planteándote resultados similares que impliquen necesariamente la modificación de cada paso de la demostración original. A continuación te planteamos algunas cuestiones que siguen este último formato.

Cuestión 1. Dar una prueba general de que $\sqrt{p}$ es irracional con p un número primo.

Cuestión 2. Probar la caracterización del ínfimo de un conjunto.
Proposición. *Sea $C \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado inferiormente. Decimos que $\beta = \inf C$ si, y sólo si, se verifican las siguientes condiciones:*

a) $\beta \leq c$ *para todo* $c \in C$,

b) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $c \in C$ *tal que* $\beta \leq c < \beta + \varepsilon$.

Cuestión 3. Probar el Axioma del Supremo en el caso del ínfimo.
Teorema (Axioma del Supremo). *Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente admite ínfimo en $\mathbb{R}$.*

Estas dos últimas cuestiones te ayudará a estudiar los resultados vistos en clase de una forma más exhaustiva, debes determinar bien el papel del supremos en cada caso para poder reemplazarlo por el del ínfimo.

Cuestión 4. Ejercicios 14, 15, 17, 18, 19 y 20 de la hoja de problemas propuestos.

Este tipo de cuestiones son características de los exámenes de la asignatura, hay que practicar e incluso intentar plantearse alguna por vuestra propia cuenta.

IMPORTANTE: Estas cuestiones deberán ser entregadas para su corrección el Lunes 13 de Noviembre. Los ejercicios no entregados en este fecha no se corregirán.