

ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007.

TEMA 2. FUNCIONES Y LÍMITES.

Guía del tema y tareas a realizar

Este documento tiene como objetivo servir de guía para estudiar y asimilar los contenidos del Tema 2 de la asignatura de Análisis Matemático I. Te ayudará a saber los elementos fundamentales y además te asignará las tareas a llevar a cabo para su evaluación.

1.- Lo que contiene este tema y lo que no debo dejar de saber

De forma esquemática, el Tema 2 ha abordado los siguientes contenidos:

- **Funciones elementales.** Hemos estudiado los conceptos básicos sobre funciones: definición de función real de variable real, dominio e imagen de una función, composición de funciones, función acotada, función inversa.

Hemos repasado, junto con lo visto a las dos primeras semanas de clase, las propiedades principales de las funciones polinómicas, trigonométricas, hiperbólicas, exponencial, logarítmica y las inversas de muchas de ellas. Ver Ejercicios 1 al 10.

- **Límite de una función en un punto.** Abordamos inicialmente el concepto de límite de una función estudiando dos ejemplos de aplicaciones físicas (cero absoluto Kelvin y fórmula de contracción de Lorentz), donde el paso al límite permite estudiar fenómenos que no pueden ser estudiados empíricamente. Otros ejemplos puedes estudiarlos en los Ejercicios 18 y 19.

Hemos introducido el concepto de límite de una función en un punto. Hemos practicado verificar la existencia de límite por la medio de la definición $\varepsilon - \delta$, donde el objetivo es determinar el valor de δ en función del ε arbitrario. Ha sido importante también precisar si este valor δ dependía del punto donde se estudiaba el límite (recuerda el ejemplo $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$) (Ejercicio 11). También se extendió esta definición a límites en el infinito y con valores infinito.

Hemos caracterizado la existencia de límite por medio de sucesiones. Esta caracterización permite abordar de forma más fácil la prueba de la "no existencia" de límite de ciertas funciones. El ejemplo más representativo de esta situación es $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Está definida en todo punto salvo el origen, donde no existe límite. Esta función, y las similares que se pueden construir, debes conocerla bien porque seguirán presentes a lo largo del curso.

La tabla de infinitésimos la tienes en la hoja de problemas, acompañada con algunas gráficas que te ayudan a entender su significado (funciones que se parecen mucho en las proximidades de un punto donde tienden ambas a cero). Su uso en el cálculo de límites es muy importante y debes aprenderla ya que no la tendrás presente en las evaluaciones (Ejercicio 12).

- **Propiedades de los límites.** De la existencia de límite hemos deducido varias consecuencias: el límite es único cuando existe, la convergencia también se verifica para el valor absoluto de la función, la función está acotada en un entorno reducido del punto, etc. Debes fijarte bien cómo la definición $\varepsilon - \delta$ de límite es la herramienta fundamental para probar estos resultados. (Ejercicio 20 y 25)

Conocemos la aritmética básica de límites: el límite de la suma es la suma de los límites, el producto..., salvo los casos de indeterminaciones.

Hemos calculado los límites de funciones que presentan indeterminaciones: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ . (Ejercicio 13)

- **Límites laterales.** La definición de límites laterales nos permitió dar el único resultado que asegura la existencia de límite. La condición de función monótona asegura la existencia de los límites laterales y esto lo hemos demostrado en un teorema que hace uso de uno de los conceptos más importantes del Tema 1, el Axioma del Supremo. En la Cuestión 1 de este documento abordamos este importante resultado. Debes entender bien esta demostración, para ello te proponemos en este documento revisar en todos los casos su demostración.

Debes tener muy presente que hay ejemplos de funciones donde existen ambos límites laterales en un punto pero no existe el límite global. Los Ejercicios 14 al 17 abordan esta cuestión. Debes familiarizarte con el comportamiento de la función tipo $e^{1/x}$ en el origen porque es un ejemplo básico de este tipo de comportamientos.

2.- Tareas para trabajar el tema

Cuestión 1. Completar la demostración hecha en clase del siguiente teorema de forma que se presenten todos los casos:

Teorema. Sea f una función real de variable real monótona (creciente o decreciente) en un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}$. Entonces f admite límites laterales en dicho punto a .

Vimos en clase el caso creciente, debes completar la demostración con el caso decreciente. Presenta todos los casos, lo visto en clase y lo que te pido ahora para que tengas una versión completa del resultado. El objetivo es que entiendas completamente esta demostración que tiene dos partes bien diferenciadas: primero determinamos qué valor puede ser candidato a ser el límite, por medio del axioma del supremo, y después verificamos que exactamente es el límite lateral de la función, por medio de la definición de límite y gracias a las propiedades del supremo/ínfimo de un conjunto.

Cuestión 2. Criterio de Cauchy. Sea f una función real de variable real definida en un entorno reducido de un punto a . Probar que f admite límite en a si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos x y x' verificando que

$$0 < |x - a| < \delta, \quad 0 < |x' - a| < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Probar este resultado.

Cuestión 3. Probar por medio de la definición de límite que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = m \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = l/m$ siempre que $g(x) \neq 0$ cerca de a .

Cuestión 4. Ejercicios 15, 20-(b), 22, 23, 24, 26, 28 y 29 de la hoja de problemas propuestos.

La consulta del libro de texto del curso puede ayudarte a atender estas cuestiones.

IMPORTANTE: Estas cuestiones deberán ser entregadas para su corrección el Lunes 27 de Noviembre. Los ejercicios entregados fuera de esa fecha no se corregirán.