ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007.

Tema 3. Continuidad de funciones reales

Guía del tema y tareas a realizar

Ete documento tiene como objetivo servir de guía para estudiar y asimilar lo contenidos del Tema 3 de la asignatura de Análisis Matemático I. Te ayudará a saber los elementos fundamentales y además te asignará las tareas a llevar a cabo para su evaluación.

1.- Lo que contiene este tema y lo que no debo dejar de saber

De forma esquemática, el Tema 3 ha abordado los siguientes contenidos:

- **Continuidad de una función en un punto.**

  Hemos definido el concepto de función continua en un punto. Hemos analizado su definición rigurosa en términos de $\varepsilon - \delta$, donde destacamos que el valor de δ depende del punto y del valor de ε.

  Hemos estudiado ejemplos de funciones continuas y discontinuas. Las discontinuidades las hemos clasificado en evitables o esenciales, y de primera o de segunda especie, viendo ejemplos de cada una de ellas. Hemos visto ejemplos de funciones con discontinuidades evitables, discontinuas en todo punto, en un sólo/varios puntos, en infinitos puntos, etc. Estos ejemplos típicos (*"patológicos"*) debes de conocerlos bien para tener presente lo que es posible que suceda cuando hablamos de funciones discontinuas.

  De la continuidad se han deducido propiedades de las funciones en un entorno del punto que son de gran interés (acotación, signo, etc.).

- **Operaciones con funciones continuas**

  La composición, la suma, el producto y el cociente, cuando existe, de funciones continuas es una función continua.

  Las funciones elementales con las que más familiarizados estamos (polinomios, trigonométricas, exponencial, logaritmo, etc.) son funciones continuas.

- **Funciones continuas en intervalos**

  Debes entender qué significa una función continua en un intervalo, principalmente en sus extremos si es un intervalo cerrado.

  Los resultados relacionados con funciones continuas en intervalos son los más importantes del tema, y de los más importantes del curso. Nos referimos al Teorema de Bolzano, la Propiedad de Darboux (su demostración es además muy ilustrativa de cómo se utiliza el Teorema de Bolzano), el estudio de la imagen de un intervalo por una función continua (en cuya desmostración utilizamos elementos de todos los temas vistos hasta ahora) y el Teorema de Weiertrass (hablamos de extremos de una función sin usar derivación como estamos acostumbrados, esto refleja la importancia de la continuidad).

Estos resultados debes saberlos bien, tener presente la importancia de sus hipótesis, cómo se utilizan en su demostración y pensar en contraejemplos que ilustren la necesidad de las mismas. Los últimos ejercicios de la hoja de problemas te ayudarán a analizar estos resultados desde todos los puntos de vista.

2.- Tareas para trabajar el tema

Cuestión 1. Ejercicios 14, 16, 18, 21, 24, 26.

Cuestión 2. Sea f una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si el máximo o el mínimo de f se alcanza en algún punto de (a, b), probar que f no es inyectiva en $[a, b]$.

Cuestión 3. Sea f una función continua en un intervalo cerrado $I = [a, b]$. Probar que si $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces existe $k > 0$ tal que $f(x) > k$ para todo $x \in I$.

Cuestión 4. Sea f una función continua en el origen que verifica $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Probar que es continua en todo punto.

IMPORTANTE: Estas cuestiones deberán ser entregadas para su corrección el Lunes 12 de Diciembre. Los ejercicios entregados fuera de esa fecha no se corregirán.