ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007.

Tema 4. Funciones derivables

Guía del tema y tareas a realizar

Este documento tiene como objetivo servir de guía para estudiar y asimilar lo contenidos del Tema 4 de la asignatura de Análisis Matemático I. Te ayudará a saber los elementos fundamentales y además te asignará las tareas a llevar a cabo para su evaluación.

1.- Lo que contiene este tema y lo que no debo dejar de saber

Este tema es uno de los más importantes del curso, además se basa enormemente en los conceptos introducidos en los temas anteriores: propiedades de funciones en intervalos, límite de funciones y continuidad. De forma esquemática, el Tema 4 ha abordado los siguientes contenidos:

- **Derivada de una función en un punto.**

  Hemos definido el concepto de derivada de una función en un punto. Hemos analizado su significado en términos geométricos, dándole sentido al límite del cociente incremental y analizado diversos ejemplos que han sido referente a lo largo del tema para muchas propiedades de las derivadas (Ej: $f(x) = |x|$, $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$).

  Hemos deducido el primer resultado relevante consecuencia de la condición de ser derivable en un punto: la continuidad de la función en dicho punto. Esto nos muestra que la continuidad y la derivabilidad son conceptos muy relacionados, pero debes tener muy claro que la implicación inversa no es cierta, esto es, no toda función continua en derivable. Debes tener bien presente los ejemplos que justifican esta última afirmación.

- **Operaciones con funciones derivables**

  La propiedad de continuidad de las funciones derivables nos permitió probar las reglas operacionales de la derivada para la suma, el producto, el cociente y el producto por escalares de funciones derivables en un punto. Seguidamente abordamos la derivabilidad de la composición de funcioneso regla de la cadena. Todas estas reglas son fundamentales para realizar el cálculo de derivadas de funciones.

  No debes olvidar que la prueba de estas reglas tan familiares tienen un sustento teórico fuerte en la propiedad de continuidad, no son simples cuentas. Este comentario debe reforzarte la idea de que todos los conceptos estudiados tienen su fundamentación lógica y deben cuidarse todos los detalles en su establecimiento y presentación.

  Las funciones elementales con las que más familiarizados estamos (polinomios, trigonométricas, exponencial, logaritmo, etc.) son funciones derivables en sus dominios de definición. La tabla de derivadas de las funciones elementales la tienes en la hoja de problemas propuestos y debes conocerla. El objetivo del curso no es realizar derivadas de funciones complicadas y tediosas, pero esto no debes enterderlo como que no debes saber derivar.

  La derivada define una nueva función: la función derivada, y a su vez las derivadas de orden superior. Las funciones elementales admiten derivadas de cualquier orden, y esto es con lo que posiblemente estás más familiarizado, pero hemos presentado ejemplos de funciones que admiten derivada en todo punto hasta un determinado orden. Debes tener presente, por medio de los ejemplos vistos en clase, que las funciones no admiten en general derivadas de cualquier orden. Debes tener bien presente ejemplos como los siguientes:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Hemos dedicado especial atención al estudio de la derivabilidad de funciones definidas a trozos como estos ejemplos. Debes recordar los comentado en clase sobre los errores comunes que se suelen cometer en el cálculo de derivadas de estas funciones.

- **Teoremas fundamentales del cálculo diferencial**

  Hemos visto un conjunto de resultados que debes conocer perfectamente, saber sus hipótesis y la necesidad de las mismas por medio de los ejemplos que hemos visto que no satisfacen el teorema por fallo de alguna de ellas.

  - **Teorema del extremos relativo (o de Fermat)** sobre la condición que deben satisfacer los extremos de una función. Debes tener muy claro que el recíproco no es cierto ($f(x) = x^3$ en el origen) y si el máximo o mínimo está localizado en un extremo del intervalo de definición de la función tampoco tiene por qué ser la derivada nula.
  - **Teorema de Rolle.** Este resultado tiene muchas similitudes en sus hipótesis con el Teorema de Bolzano, y lo que nos da son propiedades de la derivada. La necesidad de sus hipótesis se ve reflejado en un ejemplo que es referente a lo largo de todo el tema, la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

    Utilizamos en el Tema 3 el Teorema de Bolzano para probar la existencia de raíces de ecuaciones. Combinando ahora este resultado con el Teorema de Rolle es posible realizar un estudio más completo de las ecuaciones. Debes tener bien claro cómo se utilizan cada uno de ellos. Los ejercicios del 12 al 19 de la hoja de ejercicios propuestos son de este tipo.
  - **Teorema del valor medio de Lagrange.** Este resultado es menos restrictivo que el de Rolle, y lo incluye en el caso de que se verifiquen sus hipótesis. Para su prueba hacemos uso del Teorema de Rolle.

    Nos proporciona un resultado sobre la derivada a partir de los valores de la función, además tiene un sentido geométrico claro que permite interpretarlo. Como consecuencia se deduce la caracterización de las funciones con derivada identicamente nula, esto es, las funciones constantes. Esto permite probar identidades conocidas ($\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$) desde un punto de vista distinto, sin conocimiento de su origen por medio de su interpretación funcional.
  - **Teorema del valor medio de Cauchy.** Generalización del Teorema del valor medio de Lagrange para dos funciones arbitrarias. Destacar que no es una simple aplicación a cada una de las funciones del Teorema del valor medio de Lagrange. Su demostración muestra de forma muy clara cómo se utiliza normalmente el Teorema de Rolle.

    La principal aplicación de este resultado es la Regla de L'Hopital de cálculo de límites. Los ejercicios de este apartado los incorporaremos a la hoja del problemas del próximo tema.

2.- Tareas para trabajar el tema

La realización de estos ejercicios deben ayudarte a marcarte como objetivo comenzar las clases en Enero de 2007 con este Tema 4 (y por supuesto los anteriores) ya estudiado. Esta será la última asignación de actividades del curso y es la más densa de todas. Abarca cuestiones que relacionan el Tema 3 y el Tema 4, los dos más importantes del curso.

Debes empezar ya a trabajar con ritmo de preparación de exámen, no se puede dejar para más adelante entender las cosas, los ejercicios debes intentar resolverse como si fuese el día del examen, con la ventaja de tener los apuntes y el libro a mano. De esta forma te enfrentarás al estudio con una actitud más activa que será la que deberás tener en el examen.

El curso está muy próximo a su final, el Tema 5 que resta por ver es eminentemente práctico, con muchísima menos carga teórica y conceptual que los temas ya vistos.

Cuestión 1. Continuidad y derivabilidad de la función inversa
a) Sea f una función real definida en un intervalo I. Probar las siguientes afirmaciones.

1. Supongamos que f es continua en I. f es inyectiva en I si, y sólo si, f es estrictamente monótona (estrictamente creciente o decreciente).

2. Supongamos que f es monótona en I. f es continua si, y sólo si, su imagen $f(I)$ es un intervalo.

   Construye un ejemplo de función discontinua cuya imagen sea un intervalo y sea biyectiva.

   NOTA: En clase probamos la implicación derecha, este resultado nos presenta el recíproco.

3. Si f es continua y estrictamente monótona en I, con lo que tendríamos que f define una biyección de I en $J = f(I)$ y por tanto existe su inversa f^{-1}, entonces la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua y estrictamente monótona en J.

Nota: No confundir f^{-1} con $1/f$. La función f^{-1} es la inversa funcional, esto es, su composición con f da la identidad.
b) Sea f una función continua y biyectiva de un intervalo I en otro intervalo J. Si f es derivable en un punto $a \in I$ con $f'(a) \neq 0$, probar entonces que f^{-1} es derivable en $b = f(a) \in J$ y su derivada es

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

c) Utilizar el apartado anterior para calcular las derivadas de las funciones $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$ y $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x$.

Todos los apartados de esta cuestión la puedes encontrarlos en el libro de texto del curso. Requiere una lectura detenida y que completes los detalles de las demostraciones. El objetivo es que accedas a la lectura de resultados nuevos, donde los conceptos básicos del curso son las herramientas básicas de trabajo, algo que tendrás que hacer en el futuro muchas veces. Tu trabajo no se puede reducir a una simple copia del libro, hay apartados que requieren ser aclarados por tu parte.

Cuestión 2. Ejercicio 27 de la hoja de ejercicios propuestos.

Este ejercicio tiene muchas cuestiones. Algunas muy sencillas y otras más complicadas. Debes enfrentarte a estas cuestiones con la idea de que estás haciendo un examen, que debes intentar resolverlas por tus propios medios. Esto supone un nuevo escenario que debes saber enfrentar y permita evaluar tu nivel. Hay tiempo en enero resolver las dudas que hayan surgido y subsanar las deficiencias que detectes para intentar llegar a los exámenes de febrero en perfectas condiciones.

IMPORTANTE: Estas cuestiones deberán ser entregadas para su corrección el Lunes 8 de Enero de 2007. Los ejercicios entregados fuera de esa fecha no se corregirán. Si no vas a poder entregarlos personalmente, busca a un compañero que te lo haga por ti o envíarlos con anterioridad por correo electrónico (consulta la web de la asignatura), bien escaneados o en un fichero en Word o Latex.