Elementos de Historia de las Matemáticas

El gran libro de la naturaleza puede ser leído solamente por aquellos que conocen el lenguaje en el cual está escrito,y ese lenguaje es el de las matemáticas

Galileo (1564-1642)

1. Números

En contra de los que podría pensarse a priori, las matemáticas no se han ido haciendo rigurosas con el paso del tiempo. Por ejemplo, las matemáticas que se hicieron en los siglos XVII y XVIII son, con mucho, menos rigurosas que las que hacían los antiguos griegos, eran más procesos empíricos que deducciones lógicas a partir de un sistema de axiomas prefijado. Fue durante el siglo XIX cuando la necesidad de presentar los conceptos y resultados de una manera rigurosa, dejó instalado el uso de un lenguaje abstracto apropiado de forma definitiva.

El concepto de **número real** fue el último, de los que se estudian en un curso de análisis diferencial e integral, en fundamentarse rigurosamente. Posiblemente ésto es debido a que éste tiene una significación geométrica más clara (un número se puede entender como una longitud de un segmento), y sin embargo es sin duda el más difícil de fundamentar, evitando las componentes geométricas de las aritméticas.

La mayoría de las civilizaciones antiguas (babilónica, egipcia, etc.) disponían de un sistema de números que les permitía contar, **los números naturales**, y también de un sistema para asignar cantidades a partes de la unidad, **los números racionales**. Para los griegos, los números tenían un claro significado geométrico, iban asociados a medidas (longitud de un segmento, área de una superficie, volumen de un cuerpo). Para los Pitagóricos (S.VI a.C.) todo era explicable en términos de los números naturales y sus razones, los números racionales.

Los números racionales proporcionan un procedimiento muy fácil para comparar segmentos, áreas y volúmenes. Por ejemplo, como dos segmentos de longitudes $\frac{2}{15}$ y $\frac{5}{6}$ pueden compararse por medio de la reducción al común denominador ya que $\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$ y $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$, y por tanto el segundo es casi 6 veces el primero.

El descubrimiento de segmentos cuya longitud no podía expresarse usando números racionales ($\sqrt{2}$) fue mantenido en secreto, y su descubrimiento tuvo implicaciones matemáticas que tardaron siglos en superarse. Lo que es inmediato es que esta magnitud no puede medirse en comparación con la longitud de los lados por medio de números naturales. A estos números se les denominaron **inconmensurables**.

Puesto que los griegos consideraban los números asociados a medidas, es claro que para ellos todos eran positivos. Los hindúes fueron los primeros en reconocer la existencia de cantidades negativas (deudas), y ya en el siglo VII se conocían las reglas de signos (Brahmagupta).

Los árabes introducen en Occidente la matemática hindú, aunque hay reticiencias para considerarlas como soluciones de ecuaciones algebraicas (siglos VIII y IX, Al-khowarizmi). El rechazo a los números negativos se mantiene en el Renacimiento, retrasando el estudio de las ecuaciones algebraicas (las relaciones entre las raíces y los coeficientes). A las raíces negativas incluso H. Cardano (1501-1576) las llamaba raíces falsas o ficticias.

Este rechazo se mantiene durante los siglos XVII y XVIII, sin embargo, puesto que las operaciones funcionaban bien y eran claramente fiables, se usaban sin preocupación pero sin una idea clara de su concepto. Este es un ejemplo de la falta de rigor de estas fechas. Se llega al siglo XIX aceptando los irracionales pero con reparos sobre los negativos, de hecho al menos los irracionales provenían de mediciones de longitudes mientras que los negativos no, estos son los procesos empíricos a los que nos referíamos.

No fue hasta el Renacimiento, gracias a la influencia árabe heredada de la cultura hindú, quienes consideraron como números a los irracionales. En el siglo XVIII se acaban con las distinciones de si eran números o no al probarse que los más famosos números eran irracionales (L. Euler (1707-1777) prueba que e lo es y J. Lambert (1728-1777) que lo es π).

En este mismo siglo XVIII se introduce también la siguiente clasificación de los números irracionales:

algebraicos: los que son raíz de un polinomio con coeficientes enteros.

trascendentes: los que no son algenraicos.

No obstante... **¡¡en todo el siglo XVIII no se pudo obtener ningún ejemplo de números trascendente!!**

Probar que tales números existen llevó directamente a las matemáticas a los tres problemas clásicos de la matemática griega: la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Estos problemas se resolvieron en el siglo XIX. Que e es trascendente fue probado por C. Hermite (1822-1901) en 1873, y su prueba fue la base para que F. Lindemann (1852-1939) probara en 1882 que también lo es π, pero ligándolo al primer problema griego clásico de la cuadratura del círculo.

El sistema de los números reales carecía en el inicio del siglo XIX de una fundamentación adecuada. Son los conceptos de límite, función y funcion continua las que motivan la necesidad de dar pruebas rigurosas de algunos teoremas que se habían estado usando sin haber sido demostrados. Esencialmente nos referimos a los de existencia de límite de una sucesión convergente.

En el tercer cuarto del siglo XIX hubieron numerosos trabajos dedicados a dar una construcción rigurosa de los números reales a partir de los racionales (usando sucesiones o por medio de cortaduras), todas esencialmente alejándose de la visión puramente geométrica y acercándose a una fundamentación aritmética. Estos estudios aparecen en 1872 y son obra de G. Cantor (1845-1918) (sucesiones) y R. Dedekin (1831-1916)(cortaduras).

Se llega a finales del siglo XIX a una fundamentación rigurosa del sistema de números reales basada en la aritmética, o lo que es lo mismo, basada en los números naturales y sus propiedades. Esto por otro lado mostró la necesidad de dotar a su vez a los números naturales de unas bases lógicas, no basadas en su intuición.

Fue G. Peano (1858-1939) quien en 1889 dió el sustento lógico a los números naturales que hoy se sigue usando. Sistematizó sus propiedades en un sistema de axiomas o postulados básicos, de los cuales se deduce el resto de propiedades y teoremas. Se puede decir que el edificio empezó por el tejado: primero los números reales para terminar con los naturales.

En 1899 D. Hilbert (1862-1943) proporciona la definición axiomática de los números reales que estudiamos en este curso.

Referencias

[1] Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Ed. Touchstone, 1965, New York.

[2] Devlin, K., *El lenguaje de las Matemáticas*, Ed. Robinbook - Ma non troppo, 2002, Madrid.

[3] Durán, A., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Ed. Alianza, 1996, Madrid.