2. Funciones y límites. Función continua.

El contenido de esta sección es un extracto del Capítulo 2 de la excelente obra del profesor Antonio Durán (Universidad de Sevilla) *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo* [2]. Hemos eliminado algunas citas literales de las obras de los autores citados y los cuadros cronológicos. Hemos añadido simplemente algún dato biográfico de los matemáticos más relevantes citados con la idea de ayudar al lector a ubicar temporalmente la obra de cada uno de ellos con respecto a los otros ([1]).

La obra del profesor Durán en el campo de la Historia de las Matemáticas no se reduce a esta magnífica obra divulgativa sino que se amplía con la dirección de las ediciones facimil con anotaciones de las obras de Newton *Análisis de Cantidades Mediante Series, Fluxiones y Diferencias con una Enumeración de las Líneas de Tercer Orden* y de Euler *Introducción al Análisis de los Infinitos* , dos piezas fundamentales del Análisis Matemático de todos los tiempos.

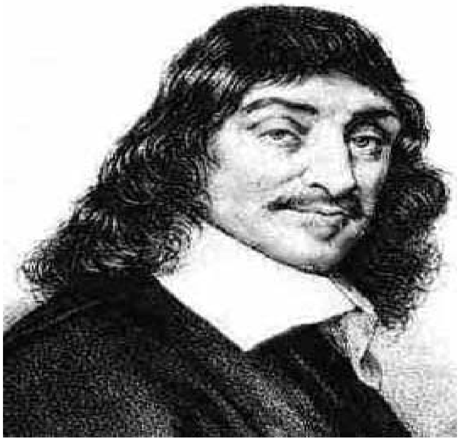
2.1. El concepto de función

La definición de función real de variable real que suele considerarse en un curso de cálculo es la siguiente: *se dice que f es una función definida en un conjunto S de números reales si a cada punto x de S se le asocia un único número real que denotamos por $f(x)$. Habitualmente se insiste en que la forma de asociar el número $f(x)$ al número x puede ser tan arbitraria como se desee.*

Para rastrear el devenir histórico de lo que hoy se entiende en análisis por función real de variable real, y cuya definición aparece arriba, hay que remontarse al cambio de mentalidad que se produjo en los matemáticos durante el siglo XVI y la primera mitad del siglo XVII y que podría sintetizarse en la invención de la geometría analítica por René Descartes (Francia, 1596-1650) (que apareció publicada en 1637 en el apéndice de su famoso *Discours de la methode*, titulado *La géométrie*). Aunque habitualmente se atribuye la invención de la geometría analítica a Descartes, un contemporáneo suyo, Pierre de Fermat, había desarrollado con anterioridad esencialmente los mismos métodos en el libro titulado *Ad locos planos et solidos Isagoge (Introducción a los lugares geométricos planos y sólidos).* El hecho de que este libro se publicara al final del siglo XVII, bastantes años después que *La géométrie* de Descartes, es la causa de que habitualmente no se relacione a Fermat con la invención de la geometría analítica.

Muy resumidamente y a *grosso modo* podríamos decir que este cambio de mentalidad se traduce en asociar a las curvas una ecuación algebraica, de manera que poco a poco se fueron priorizando los aspectos relacionados con estas expresiones algebraicas de las curvas (aspectos analíticos) frente a los aspectos geométricos. Por ejemplo, hasta entonces una circunferencia era entendida como el corte de un cono con un plano perpendicular al eje del cono, sin una expresión algebraica asociada; a partir de entonces empezaría a verse como una ecuación de la forma $x^2 + y^2 = a^2$. Este cambio de actitud sería esencial para el desarrollo del cálculo infinitesimal.

También fue importante en relación con el nacimiento del concepto de función el interés que en aquella época suscitó el estudio del movimiento. Este interés queda reflejado en los trabajos de Kepler sobre el movimiento planetario, o en los de Galileo sobre dinámica. Fruto de estos estudios eran unas leyes físicas que se expresaban como una dependencia entre cantidades variables. Justamente en esta idea de *dependencia de cantidades variables* se encierra la esencia de un primitivo concepto de función.



R. Descartes (1596-1650) G. W. Leibniz (1646-1716)

Así pues, a partir de Descartes, y ya en el siglo XVII, se empezó a manejar de manera más o menos primitiva el germen de lo que serían las actuales funciones. Sin embargo, debemos reseñar que más que como una regla que asigna una cantidad a otra, una función era pensada como una relación entre dos variables que, convenientemente interpretada, representaba una curva. En estos comienzos, las funciones se manejaban en forma implícita y prácticamente se reducían a funciones cuadráticas o cúbicas, esto es, un polinomio en dos variables de grado 2 ó 3 igualado a cero. Descartes llamó a las curvas que venían dadas por un polinomio en dos variables igualado a cero curvas geométricas, mientras que a aquellas que estaban definidas de una manera dinámica o cinemática, cuyas ecuaciones en general no eran de la forma antes descrita, las llamó curvas mecánicas. Descartes negó a estas últimas el interés de ser estudiadas desde el punto de vista geométrico.

En la segunda mitad del siglo XVII empezaron a usarse con más asiduidad expresiones explícitas para las funciones, precisamente por los matemáticos que estaban empezando a desarrollar el cálculo infinitesimal: Wallis, Barrow, Newton, Leibniz, etc.

A la vez, el número de funciones que los matemáticos consideraban interesantes de estudiar se fue ampliando, especialmente por motivos derivados de los recientes avances del cálculo infinitesimal; así, los logaritmos inventados a principio de siglo, las exponenciales y las razones trigonométricas empezaron a tratarse desde el punto de vista funcional, al descubrirse que estas funciones daban respuesta a determinados problemas de tangentes y cuadraturas. De esta forma, las llamadas por Descartes curvas mecánicas adquirían de nuevo el interés que aquél quiso quitarles. Uno de los inventores del cálculo, Gottfried Wilhelm Leibniz (Alemania, 1646-1716), reivindicó el papel de estas funciones, y les cambió los nombres para eliminar los aspectos peyorativos que pudieran tener los de

Descartes; así las curvas geométricas pasaron a llamarse curvas algebraicas, mientras que las curvas mecánicas se denominaron curvas trascendentes; denominación que todavía hoy seguimos usando.

Gran parte de las nuevas curvas introducidas fueron definidas usando razonamientos de tipo dinámico. Así, la curva más famosa de aquellos tiempos, la cicloide, se definió como el lugar geométrico que genera un punto situado sobre una circunferencia que se desplaza girando sin deslizamiento por una recta.

Parece que fue el escocés James Gregory (1631-1675) quien expresa por primera vez la idea de relación funcional:

> *Decimos que una cantidad x está compuesta de otras cantidades a, b,..., si x resulta de a, b,..., por las cuatro reglas elementales (suma, resta, producto y división), extracción de raíces o por cualquier operación imaginable.*

Sin embargo, fue Leibniz en 1673 quien primero empleó el término de función aunque no en el sentido actual. En la correspondencia de Leibniz con su discípulo, el suizo Jean Bernoulli (fundador junto con su hermano Jacques de la más famosa saga familiar de matemáticos de la historia), éste usó el término de función en un sentido próximo al actual. Tras un intercambio de opiniones entre ambos sobre la definición de Bernoulli, y sobre la notación más conveniente para las funciones, aparece por primera vez impresa lo que podríamos considerar una primigenia, aunque muy vaga, definición de función. Se encuentra en un artículo de Jean Bernoulli publicado en 1718 y que trata sobre un problema isoperimétrico (genéricamente, entre figuras con igual perímetro encontrar la que encierre más área) propuesto por su hermano Jacques:

> *Una función de una variable es definida aquí como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes.*

La expresión *de alguna manera*, que aparece en la definición anterior, hay que entenderla en su contexto, esto es, esa *manera* debe ser expresable con operaciones matemáticas o, en otras palabras, significa que las variables y constantes aparecen en sumas o productos, ya sean finitos (funciones polinómicas y racionales) o infinitos (cuyo ejemplo más característico son las series de potencias). Lo aclara el propio Bernoulli cuando dice: *de una manera algebraica o trascendentes.*

Fue el gran matemático del siglo XVIII Leonard Euler (también suizo y discípulo de Jean Bernoulli, 1707-1783) quien colocó la idea de función como objeto de estudio y centro del análisis moderno, que había fundado él mismo partiendo del cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz. Así, en su *Introductio in analysin infinitorum* publicado en 1748 (libro pionero del análisis matemático) define una función como

> *Una función de una magnitud variable es cualquier expresión analítica formada con la cantidad variable y con números o cantidades constantes.*

El término *expresión analítica* tiene el mismo significado que en la definición de Bernoulli, que Euler retoma. Para ser más precisos, Euler enumera un conjunto de operaciones que generan estas expresiones analíticas. Después, en el capítulo IV de su libro reducirá todas estas operaciones a una sola, que la función admita un desarrollo en serie de potencias, aclarando que los exponentes de las potencias no tienen necesariamente por qué ser números enteros positivos.

Obsérvese cómo el concepto de función va tomando el sentido de aplicación. Las funciones se comienzan a pensar más que como una combinación de variables, como una asociación de valores.

Sin embargo, la definición anterior de Euler es demasiado limitada y restrictiva, de manera que las funciones incluidas en ella serían necesariamente muy regulares, pues admitirían un desarrollo en serie de potencias. Consideraciones de tipo físico hicieron pronto ver que había que ampliar el concepto de función para dar cabida a muchas que habían quedado fuera. Entre estas consideraciones de tipo físico están las derivadas del problema de la cuerda vibrante, que daría origen a las series trigonométricas o de Fourier. Este problema consiste en estudiar las vibraciones de una cuerda sujeta por sus extremos.

El propio Euler consideró algunas veces otro concepto de función más amplio: la relación entre las coordenadas de los puntos de una curva dibujada en un plano a mano alzada. O bien

> *Cuando ciertas cantidades dependen sobre otras de manera que ésta, sufren un cambio cuando aquéllas cambian, entonces las primeras son llamadas funciones de las segundas. Este nombre tiene un carácter extremadamente amplio: abarca todas las formas en que una cantidad puede ser determinada usando otras.*

Podemos decir que con Euler culmina el proceso de cambio al que hacíamos referencia anteriormente, originado durante el siglo XVI y la primera mitad del XVII. Si allí poníamos como ejemplo la circunferencia, aquí baste decir que toda la trigonometría, que desde los griegos tenía carácter puramente geométrico, pasó a ser parte del análisis; a partir de Euler, las líneas trigonométricas pasan a ser funciones trigonométricas, funciones de una variable (con un claro sentido geométrico) expresables analíticamente en serie de potencias.

L. Euler (1707-1783)

J. B. J. Fourier (1768-1830)

En el mismo sentido analítico de Bernoulli-Euler, entendía el francés Joseph Louis Lagrange (1717-1813) (uno de los grandes matemáticos de la Revolución Francesa) el concepto de función. A

Lagrange se debe el primer intento serio de fundamentar con rigor el cálculo infinitesimal, aunque sin éxito.

En los inicios del siglo XIX la tendencia era hacia un concepto de función más amplio, acorde con las definiciones últimas de Euler. En este sentido se encuentra el concepto de función del contemporáneo de Lagrange, Jean B. J. Fourier (Francia, 1768-1830) . En su libro *La théorie analytique de la chaleur* publicado en 1822 escribe:

> *Una función general $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada uno de los cuales es arbitrario,*
> *[...]*
> *No supondremos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común; pueden seguir una a otra de una manera completamente arbitraria y cada una de ellas está definida como si fueran una única cantidad.*

A pesar de la aparente amplitud de la definición de Fourier, de nuevo hay que situarla en el contexto de su tiempo; de esta forma, las funciones que Fourier tiene en mente tendrían singularidades (discontinuidades o puntos donde no existiera derivada) a lo más en un número finito de puntos. Fourier pensaba en funciones a las que podía asociar una expresión analítica, en este caso no una serie de potencias, sino lo que hoy se conoce como serie trigonométrica o de Fourier y que consiste en una expresión de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)).$$

Sin embargo, este concepto de función que lleva asociado una serie de Fourier tampoco es lo suficientemente amplio como para ser satisfactorio, pues de nuevo impone ciertas condiciones de regularidad sobre la función, que a veces no se dan.

Tras otros intentos de extenderlo llegamos al actual concepto de función; se atribuye a dos matemáticos que lo expusieron de manera independiente: el ruso Nicolas I. Lobachevski (1793-1856) y el alemán Peter G. L. Dirichlet (1805-1859) (sucesor de Gauss en Gotinga).


N. I. Lobachevski (1793-1856)


P. G. L. Dirichlet (1805-1859)

Es significativo que los dos definieran sus conceptos en artículos relacionados con las series trigonométricas o de Fourier; indica que los problemas sobre series de Fourier (convergencia de la serie, definición de los coeficientes, etc.) servían de motor para la profundización en los conceptos de función, integral y convergencia. Tampoco debemos olvidar que la teoría de conjuntos tuvo su origen en los trabajos de Cantor sobre las series de Fourier.

Lobachevski en 1834 escribía:

> *La concepción general requiere que una función de x sea definida como un número dado para cada x y variando gradualmente con x. El valor de la función puede ser dado bien por una expresión analítica o por una condición que aporta un modo de examinar todos los números y elegir uno de ellos o, finalmente, la dependencia puede existir y resultar desconocida.*

Dirichlet en 1837 escribe:

> *Tomaremos dos valores fijos a y b y una cantidad variable x que toma todos los valores entre a y b. Si un único valor finito y corresponde a cada x, y más aún, de tal manera que cuando x toma continuamente los valores entre a y b, $y = f(x)$ también varía continuamente, entonces y se dice una función continua de x para este intervalo. No es necesario aquí que y esté dada en términos de x por una única ley en todo el intervalo, y tampoco es necesario que estas leyes sean expresables mediante operaciones matemáticas.*

En opinión de la mayoría de los historiadores de las matemáticas, no es importante que estas definiciones se refieran sólo a funciones continuas, pues la misma regla es válida para definir funciones discontinuas con igual generalidad.

Concluiremos esta sección repasando brevemente la forma en que ha evolucionado la notación para funciones. Fue Descartes quien introdujo el uso de las primeras letras del alfabeto a, b, c, ... para denotar constantes y las últimas ..., x, y, z para denotar variables. Como ya hemos indicado en un principio, las funciones solían usarse en expresión implícita, como una ecuación entre las variables (recordemos de nuevo que, en aquella época, el número de funciones consideradas interesantes era muy reducido); por ejemplo, la ecuación de una hipérbola se escribía ya en la primera mitad del siglo XVII como $xy = a$.

Cuando, a partir de la segunda mitad del siglo XVII, se empezaron a usar expresiones explícitas para las funciones, éstas siguieron denotándose por las últimas letras del alfabeto; así, Newton escribía

$$y = \frac{1}{1+x^2} \quad y = \frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}$$

Como se ve, en la notación usada aquí para la función, esto es, y, no aparece aún asociada la variable. Nótese que también se está usando para la función una letra que habitualmente es usada para denotar una variable. Esto indica que las funciones eran entendidas más como una relación entre las variables que como una aplicación que a un número x le asocia otro $y(x)$.

Parece que fue Jean Bernoulli quien primero usó para denotar funciones letras distintas de las usadas para denotar variables, a la vez que indicaba la variable relativa a la función. Así, o bien usaba la letra mayúscula correspondiente a la variable para denotar una función, o una letra griega seguida de la variable respecto de la que aquélla es función. Por ejemplo, escribía ϕx para denotar que ϕ es función de x.

Fue Euler el que primero usó las letras que desde entonces son habituales para denotar funciones, esto es, f, g, h, indicando entre paréntesis las variables, tal y como hoy seguimos haciendo. Así, Euler escribía $f(x)$ para indicar el valor que la función f asocia al punto x.

2.2. El concepto de límite

La definición de límite que hoy se usa sorprende por su complicación conceptual y formal, caracterizada por un enunciado aparentemente indescifrable. Es ésta: *la función f tiende hacia el límite l cuando x tiende a x_0 si, para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que, para todo x, $0 < |x - x_0| < \delta$ y f está definida en x, entonces $|f(x) - l| < \epsilon$.*

El concepto de límite (siglo XIX) es posterior al de derivada (siglo XVII), aunque el primero se use para dar una definición rigurosa del segundo. Más aún, el concepto de límite surgió precisamente para dar una justificación rigurosa a toda la estructura del cálculo diferencial e integral desarrollado durante el siglo XVIII. No es extraño, por lo tanto, que para rastrear los primeros intentos de definir el concepto de límite haya que acudir a uno de los fundadores del cálculo infinitesimal: Isaac Newton (Inglaterra, 1642-1727). En efecto, Newton ya intuyó que detrás del concepto de derivada se hallaba el más primitivo de límite, aunque sólo lo apuntó de forma rudimentaria. Así, en su obra maestra *Philosophiae naturalis principia mathematica* (donde se incluyen sus trabajos sobre los fundamentos de la física y la astronomía) se encuentra el siguiente lema, en la sección 1 del Libro 1:

> *Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales.*

Con este lema, Newton intentaba justificar el concepto de incrementos evanescentes con el que pretendió evitar el uso de las cantidades infinitesimales en el desarrollo del concepto de derivada. Newton fue consciente de la debilidad del concepto de cantidad infinitesimal (un número que es infinitamente pequeño pero sin llegar a ser cero) para justificar el cálculo.

A pesar de todo, el concepto newtoniano de *cantidad evanescente* seguiría resultando vago pues el hecho de que en última instancia se obtenga una indeterminación $\frac{0}{0}$ causaba confusión. Cuando Newton habla de razones últimas se está refiriendo al límite, pero el problema está justamente en definirlo sin hacer uso del valor del cociente cuando la variable alcanza este límite, que puede ser un valor indeterminado.

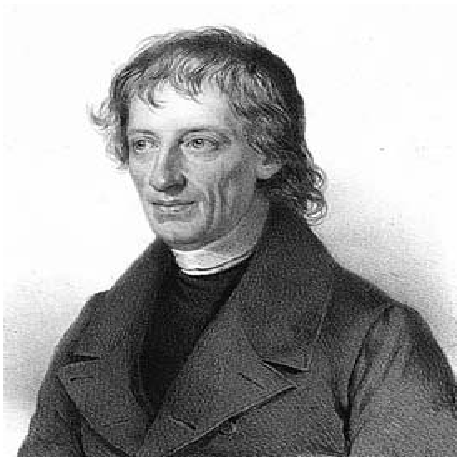
Hay que remontarse a mediados del siglo XVIII para encontrar el siguiente paso en el intento de profundizar en el concepto de límite. De nuevo este intento iba encaminado a superar la idea de cantidad infinitesimal sobre la que se apoyaba el cálculo. Se debe a un matemático francés, Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). Así, en un artículo para la *Encyclopédie* sobre la obra de Newton *De quadratura curvarum*, D'Alembert ya intentó justificar estos incrementos como límites. Precisamente en la misma *Encyclopédie* y en un artículo titulado «Límite», podemos encontrar una definición de límite, imprecisa formalmente pero mucho más sugestiva que aquella primitiva de Newton:

> *A una cantidad se la llama límite de una segunda cantidad variable si la segunda puede aproximarse a la primera hasta diferir de ella en menos que cualquier cantidad dada, sin llegar nunca a coincidir con ella.*

Esta imprecisión formal hizo que la definición fuera poco sugestiva para sus contemporáneos, que prefirieron seguir usando los conceptos y el lenguaje de los infinitesimales para justificar el cálculo diferencial.

Es en el primer cuarto del siglo XIX cuando se consigue dar el impulso definitivo que culminará con la definición precisa de la idea y el concepto de límite para formar el fundamento riguroso que el cálculo diferencial había estado necesitando durante siglo y medio. Esencialmente este primer impulso se debe a dos matemáticos que desarrollaron sus trabajos independientemente. El primero cronológicamente fue el matemático checo Bernhard Bolzano (1781-1848). El otro, el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857).


A. L. Cauchy (1789-1857)


B. Bolzano (1781-1848)

A pesar de que Bolzano precedió a Cauchy en la elaboración y publicación de sus trabajos, su obra pasó desapercibida en su época: por una simple razón geográfica Bolzano escribió y publicó sus resultados en Praga mientras que Cauchy lo hacía en París. Esencialmente, ambos aritmetizaron el olvidado concepto de límite de D'Alembert; así, en su libro *Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique* (1821) Cauchy definió:

> *Cuando los sucesivos valores atribuidos a una variable aproximan indefinidamente a un valor fijo tanto que al final difieren de él tanto como uno desea, esta última cantidad es denominada el limite de todas las otras.*

Usando este concepto dio una definición rigurosa del concepto de cantidad infinitesimal:

> *Cuando los sucesivos valores de una variable disminuyen indefinidamente, de tal forma que llegan a ser menores que cualquier cantidad dada, esa variable es lo que denominamos un infinitésimo. El límite de esa variable es 0.*

Nótese que Cauchy considera aquí los infinitésimos como variables en lugar de cantidades fijas como se venía haciendo hasta entonces.

La noción de cantidad infinitesimal estaba tan profundamente enraizada en el cálculo que siguió perviviendo mucho tiempo después de Cauchy. De hecho, éste y sus contemporáneos siguieron haciendo un uso decisivo de las cantidades infinitesimales, especialmente en trabajos de investigación. En numerosas ocasiones, este uso de los infinitésimos no correspondía con la definición anterior de Cauchy.

Finalmente, fue el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897) quien culminó el proceso, aportando la definición de límite tal y como hoy la enseñamos. Weierstrass elimina los elementos imprecisos que aparecían en la definición de Cauchy tales como *aproximan indefinidamente* o *difieren tanto como uno desea*, y los sustituye por a ahora clásica expresión algebraica del épsilon y el delta: *el límite de una función* $f(x)$ *vale* l *cuando* x *tiende a* x_0 *si para cualquier entidad positiva* $\epsilon > 0$ *existe otra cantidad positiva* $\delta > 0$ *de manera que para todo punto* x *verificando* $0 < |x - x_0| < \delta$ *y donde la función* f *esté definida se tiene que* $|f(x) - l| < \epsilon$.

Desde finales de 1850 hasta finales de 1880, Weierstrass estuvo impartiendo clases en la Universidad de Berlín, aunque no publicó sus lecciones, estas definiciones nos han llegado a través de sus numerosos alumnos. A partir de la segunda mitad del siglo XIX, Alemania fue afianzándose como el centro del saber matemático, quitándole el puesto a Francia, lo que aseguró una eficaz difusión de la aritmetización del análisis de Weierstrass.

K. Weierstrass (1815-1897)

Para finalizar, haremos un breve apunte referente a la notación. La notación usada por Cauchy para el límite fue *lim*, sin especificar el punto hacia el que se tomaba límite. Al parecer fue Weierstrass quien añadió esta información, aunque en forma un poco diferente a la actual. Así, escribía $lim_{\epsilon=1}$

para denotar que se tomaba límite cuando ϵ tendía a 1, o $lim_{n=\infty}p_n$ para denotar que se tomaba límite cuando n tendía hacia infinito.

Sin embargo, algunos matemáticos no encontraban apropiado el uso del signo igual para indicar el punto hacia donde se tomaba límite, especialmente cuando el límite era hacia infinito, y así finalmente fue uno de los grandes matemáticos de este siglo, G. H. Hardy (Inglaterra, 1877-1947), quien definitivamente estableció (aunque indicando que no fue el primero en usarla) hacia principios de siglo la actual notación, sustituyendo el signo igual por la flecha $\rightarrow$ en la notación de Weierstrass. Quedando de esta forma $lim_{x\rightarrow a}$ o $lim_{x\rightarrow\infty}$ para denotar que el límite se toma cuando la variable x tiende hacia a o hacia infinito.

2.3. El concepto de función continua

La expresión función continua ha tenido diferentes significados a lo largo de la historia de las matemáticas; algo similar a lo que vimos en la sección primera que le ocurrió al concepto de función. Así, para Euler función continua era sinónimo de función analítica: no queremos decir que Euler confundiera los conceptos de continuidad y analiticidad, simplemente su terminología difería de la nuestra. Hasta las primeras décadas del siglo XIX no se unificó el concepto de función continua. Su definición rigurosa la dieron a la vez Bolzano y Cauchy. Así, mientras Bolzano definía (1817)

> *[...] que una función f x varíe para todos los valores de x estando dentro o fuera de ciertos límites. simplemente significa que, si x es uno de esos valores, la diferencia $f(x+w)-f(x)$ puede hacerse tan pequeña como uno quiera tomando w suficientemente pequeño.*

Cauchy escribía (1821) que f es continua en x si

> *[...] el valor numérico de la diferencia $f(x+h)-f(x)$ tiende indefinidamente a cero cuando lo hace h. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua en x entre dos límites dados, si un incremento infinitesimal en la variable siempre produce un incremento infinitesimal de la función misma.*

Las expresiones *x estando dentro o fuera de ciertos límites*, en la cita de Bolzano, y *x entre dos límites dados*, en la de Cauchy, significan que el punto x está en un intervalo prefijado.

Obsérvese que cuando Bolzano o Cauchy daban sus definiciones de función continua (1817 y 1821 respectivamente), aún no había una definición satisfactoria del concepto de función (las definiciones de Lobachevski y Dirichlet aparecen en 1834 y 1837 respectivamente). Sirva esto como ejemplo para mostrar que la evoución de los conceptos matemáticos ha sido frecuentemente caótica, involucrando a numerosos matemáticos en cada pequeño paso.

Como en el caso del concepto de límite, fue Weierstrass quien definió la continuidad en la forma que hoy usamos: *$f(x)$ es continua en x_0 si, para cualquier cantidad positiva $\epsilon > 0$, existe otra cantidad positiva $\delta > 0$ de manera que, para todo punto del intervalo $|x-x_0| < \delta$ donde la función f*

esté definida, se verifica que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Al fijarse finalmente el concepto de función continua, se revisaron muchos de los teoremas que hasta entonces se habían supuesto válidos para este tipo de funciones (la mayoría sin prueba). Así, Bolzano en 1817, y en el mismo artículo donde define la noción de continuidad, publicó el teorema que lleva su nombre y que afirma que toda función continua que cambie de signo en los extremos de un intervalo, vale cero en algún punto de su interior. Su prueba es una de las que hoy se utilizan, basada en la propiedad del supremo de los números reales.

Otro de los teoremas clásicos sobre funciones continuas, y que había sido usado sin prueba por Cauchy, es el que afirma que una función continua definida en un intervalo cerrado alcanza sus valores extremos (máximo y mínimo). Finalmente fue probado por Weierstrass.

Referencias

[1] Bell, E. T., *Men of Mathematics*, Ed. Touchstone, 1965, New York.

[2] Durán, A., *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Ed. Alianza, 1996, Madrid.