

Análisis Matemático I
Curso 2004/05 - Convocatoria de Junio

Alumno: _____

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

- (a) Sea $f(x)$ una función definida en $[0, 1]$ con $f'(0) > 0$, ¿puede presentar f un extremo en este punto $x = 0$?
- (b) Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[0, 1]$ verificando que $f(0) = f(1/2) = f(1)$ y $f'(x) = 0$ para todo $x \neq 0, 1/2, 1$. ¿Es $f(x)$ constante?
- (c) Razonar la veracidad o falsedad del siguiente razonamiento: Si para dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sabemos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, entonces existe $\delta > 0$, pudiendo ser muy pequeño, tal que en alguno de los semiintervalo a la izquierda $(a - \delta, a)$ o derecha $(a, a + \delta)$ se tiene que $f(x) < g(x)$ en todos sus puntos.
- (d) Si una función es derivable entonces ella y su derivada son continuas, ¿cierto o falso?.
- (e) Si f es derivable en un intervalo y creciente, entonces $f'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. ¿Cierto o falso?

2. Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y $k \in \mathbb{U}$ tal que $f(a) < k < f(b)$. Consideremos el conjunto

$$M = \{x \in [a, b] : f(x) = k\}.$$

Justifica razonadamente la existencia o no del supremo de M . En caso de existir, si lo denotamos por $c = \sup M$, estudiar cuánto vale $f(c)$.

3. Demostrar por inducción la siguiente fórmula:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. a) Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$$

b) Demostrar que $x^2 = 18 \ln x$ tiene una única solución en $(1, e)$.

5. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

6. Una página rectangular ha de contener 96 cm^2 cuadrados de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 cm de anchura y los laterales 2 cm . ¿Qué dimensiones de la página minimizan la cantidad de papel requerida?

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.