ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007

Tema 1. Números reales.

Problemas propuestos

1. Demostrar por inducción las siguientes fórmulas:

   a) $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

   b) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   d) $1+3+\cdots+(2n-1)=n^2$

   e) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

   f) $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}=1\dot{7}$ (múltiplo de 17).

   g) $6\,(1+7+7^2+\cdots+7^n)+1=7^{n+1}$.

   h) $2^n > n$.

   i) $3^{4n}+9=1\dot{0}$

   j) $9^{n+1}-8n+55=6\dot{4}$

   k) 5^n-1 es divisible por 4 para todo $n\geq 1$.

2. Resolver las inecuaciones siguientes:

   a) $\dfrac{2x-3}{x+3}>3x$. *b)* $(x-\sqrt[3]{2})(x-\sqrt{2})>0$.

   c) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x}{x-2}\leq 2$. *d)* $\dfrac{5-x}{x^2-1}>1$.

   e) $1-\dfrac{x}{2}>\dfrac{1}{1+x}$. *f)* $x < x^2-12 < 4x$.

   g) $\dfrac{20}{x+2}>7-x$. *h)* $2x-\dfrac{3x}{x+1}>1$.

   i) $\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}<0$. *j)* $\dfrac{(x+3)(x-4)}{x^3-2x^2-3x}<0$

3. Demostrar que para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$, tales que $0<x<y$ se cumple:

$$x<\frac{2xy}{x+y}<\frac{x+y}{2}<y$$

4. Demostrar que para cualesquiera $x,y\in\mathbb{R}$, tales que $0<x<1$, $0<y<1$, se tiene:

$$0 < x+y-xy < 1$$

5. Encontrar los números reales x para los que se cumplen:

$a) |x-2| < 3.$ $\quad b) |2x+5| > 3.$

$c) \dfrac{|x+1|}{|x-1|} \geq 1.$ $\quad d) |x^2-3| \leq 1.$

$e)\ |x+2| + |x-2| \leq 12.$ $\quad f)\ |\ |x+1| - |x-1|\ | < 1.$

$g)\ \left|x - \dfrac{1}{x}\right| > 1.$ $\quad h)\ |5 - x^{-1}| < 1.$

$i)\ |x^2 - 7x + 12| > x^2 - 7x + 12.$ $\quad j)\ |2x-1| < |x-1|.$

$h)\ |\ |x+1| - |x-2|\ | \geq 2.$ $\quad k)\ \left|5x - \dfrac{2}{x-1}\right| < 2.$

$l)\ |x-1| \leq x^2 + 1.$ $\quad m)\ |x^2 + x - 3| > \dfrac{x^2+3x}{2}.$

6. Hallar los números $x \in \mathbb{R}$ tales que:

$$a)\ |x-3|(|x-1| - |x+1|) < 0 \quad b)\ \left|\frac{5}{x+1}\right| < |5-x| \quad c)\ |x||x^2-4| \geq 1$$

7. Demostrar las desigualdades:

$$|x-y| \geq |\ |x| - |y|\ |.$$

8. Demostrar que:

(a) La suma de un número racional y un número irracional es otro número irracional.

(b) Un número racional no nulo multiplicado por un número irracional da otro irracional.

9. Demostrar que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.

10. Demostrar que $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ son irracionales.

11. (a) Demostrar que si $x = p + \sqrt{q}$, donde p y q son racionales, y m es un número natural, entonces $x^m = a + b\sqrt{q}$ siendo a y b números racionales.

(b) Demostrar también que $(p - \sqrt{q})^m = a - b\sqrt{q}$.

12. Encontrar los supremos e infimos de los siguientes subconjuntos de la recta real y sus elementos máximo y mínimo cuando existan:

$$S_1 = \{1, -1/2, 1/3, -1/4, 1/5, ...\}$$
$$S_2 = \left\{\frac{1}{n}\ :\ n \in Z,\ n \neq 0\right\}$$
$$S_3 = \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n\ :\ n \in \mathbb{N}\right\}$$
$$S_4 = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x = 1/n\ , n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$$
$$S_5 = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x = 2^{-p} + 3^{-q} + 5^{-r}, p, q, r \in \mathbb{N}\}$$
$$S_6 = \{x \in \mathbb{R}\ :\ 3x^2 - 10x + 3 < 0\}$$

$$S_7 = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0 \quad a < b < c < d\}$$

Los siguientes ejercicios tienen una componente eminentemente teórica. Deben ayudarte a repasar de forma exhaustiva la parte teórica de la asignatura y buscan que la estudies en un formato basado en el entendimiento y el razonamiento, más que en aspectos puramente memorísticos.

13. Determinar un irracional que esté contenido en el intervalo [0,1]. ¿Puedes construir otros 10? ¿Y 100?.

14. ¿Cómo justificas que todo número real es el límite de una sucesión de números racionales? ¿y de irracionales?

15. Construye una sucesión de números irracionales que converja a 1/3.

16. Construte una sucesión de números irracionales contenida en el intervalo [11,12].

17. Razona la veracidad o falsedad del siguiente razonamiento: Las únicas sucesiones de racionales que se aproximan a un irracional son aquellas que tienen todos sus elementos con un número finito de decimales, por ejemplo los que aparecen en la expresión decimal del irracional. Por ejemplo, la sucesión de racionales que aproxima a $\sqrt{2}$ es siempre de la forma $\{1, 1'4, 1'41, ...\}$.

18. ¿Toda sucesión de números reales es convergente? Si la respuesta en no, ¿en qué condiciones?

19. ¿Cuándo un conjunto de números reales tiene supremo o ínfimo? ¿Cuándo es finito?

20. Toda sucesión, incluso las no convergentes, admite al menos una subsucesión convergente. ¿Cierto o falso?