ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007

Tema 2. Funciones y Límites

Problemas propuestos

1. Construir una función cuyo dominio sea el intervalo $[0,1]$ y cuyo recorrido sea $[-1,2]$.

2. Dibujar la gráfica de cada una de las siguientes funciones definidas en S, e indicar en cada caso cuál es el recorrido.

   a) $S=[-1,1]$, $f(x)=|x|$.

   b) $S=(0,1]$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

   c) $S=[-2,3]$, $f(x)=x-[x]$.

3. Calcular el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x)=x\sqrt{x^2-2}$ *b*) $f(z)=\ln\left(\dfrac{2+z}{2-z}\right)$

   c) $f(x)=\ln(\ln x)$ *d*) $f(x)=\arccos\left(\dfrac{2x}{1+x}\right)$

   f) $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ *g*) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}}$

4. La función x^2-2x+3 está definida para cada número real x. Comprobar que no es inyectiva si el dominio es $\mathbb{R}^2$, y determinar los dos intervalos máximos donde es inyectiva.

5. En el intervalo $[0,1]$ se definen las funciones

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, \qquad g(x)=-\sqrt{1-x^2}.$$

   Determinar el recorrido de cada una de ellas, calcular las inversas y dibujar las gráficas.

6. Sean $f,g,h:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x)=x^2$, $g(x)=2^x$, $h(x)=\operatorname{sen} x$. Calcular

   a) $f\circ g$ *b*) $f\circ h$ *c*) $(f\circ g\circ h)+(h\circ g)$

7. Determinar $f[f(x)]$, $f[g(x)]$, $g[f(x)]$ y $g[g(x)]$ en cada uno de los siguientes casos

   a) $f(x)=x^2$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

   b) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{si } x\geq 0\\ -1, & \text{si } x<0\end{cases}$, $g(x)=\frac{1}{x}$.

   c) $f(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leq 0\\ x, & \text{si } x>0\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}0, & \text{si } x\leq 0\\ x^2, & \text{si } x>0\end{cases}$

   d) $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ x, & x>0\end{cases}$, $g(x)=\ln x$.

8. Determinar el intervalo máximo (Dominio)en el que está definida la función

$$\ln\{\ln[\ln(\ln x)]\}.$$

9. Realizar el estudio de la gráfica de las funciones $y = x^{\frac{p}{q}}$ con $\dfrac{p}{q} < 1$ o $\dfrac{p}{q} > 1$ y en cada caso según p o q sea par o impar. (Ver Juan de Burgos, pag. 102)

10. Idem con $y = x^\alpha$ con α irracional.

11. Demostrar por medio de la definición de límite que:

$$a)\ \lim_{x\to 0} x\ sen\frac{1}{x} = 0 \qquad b)\ \lim_{x\to 2} x^2 = 4$$

$$c)\ \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2} \qquad d)\ \lim_{x\to b} x^4 = b^4$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{3x+1} = \frac{2}{3} \qquad f)\ \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$g)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = +\infty \qquad h)\ \lim_{x\to 9} \sqrt{x} = 3$$

12. Calcular los siguientes límites (ver tabla de inifinitésimos equivalentes en la última hoja):

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{5x^2+x-1} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} \frac{x^3(\operatorname{sen} x)}{(1-\cos x)^2}$$

$$d)\ \lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{x^2}\right)^{\dfrac{3}{x-2}} \qquad e)\ \lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)^{\dfrac{1}{x-1}} \qquad f)\ \lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^3-x^2-x+1}$$

$$g)\ \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x+2} - x \qquad h)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x-3} \qquad i)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{arc\,sen} 3x^2}$$

$$j)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sec x - \operatorname{tg} x) \qquad k)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{tg} x} \qquad l)\ \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)(1-\cos\frac{1}{x})}{(x+3)\ln(1+\frac{1}{x^2})}$$

$$m)\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+3x-5}{x^2-4x+2}\right)^{\dfrac{x^2+5}{x+2}} \qquad n)\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2-1} \qquad o)\ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x}{1+x+x^2}\right)^{1+\operatorname{cotg}^2 x}$$

13. Calcular los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7x^4-3x^2+2}{2x-3x^2+5x^4}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^3-1}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x^5-2x+1}}$

$c)\ \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+4x-2}+\sqrt{4x^2-5}-3x$ $\qquad d)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-9}$ $\qquad f)\ \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2+3x+4}{2x-1}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{ln(cosx)}{x^2}$ $\qquad h)\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$

$i)\ \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$ $\qquad j)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen} x)}{(x+\operatorname{sen} x)^2}$

$k)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\qquad l)\ \lim\limits_{x\to 0} \left[\dfrac{a_1b_1^x+a_2b_2^x}{a_1+a_2}\right]^{1/x}$

$m)\ \lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^3\ sen\ \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3$ $\qquad n)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$

$o)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt{1+x^2}\right)^{\dfrac{3}{\operatorname{arc\,sen} x}}$ $\qquad p)\ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{\ln(1-x)}$

$q)\ \lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$ $\qquad r)\ \lim\limits_{x\to\infty} [\ln(2x+2)-\ln(x+2)]$

14. Calcular los límites laterales de la función

$$f(x)=\frac{1}{1-e^{1/x}} \quad \text{en } x\neq 0.$$

15. Hallar los límites laterales de la función

$$f(x)=3+\frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$$

cuando $x \longrightarrow 1$.

16. Estudiar el límite:$\lim_{x\to 0}\exp\frac{|x|}{x}$

17. Estudiar la existencia del límite cuando $x\to 0$ de las siguientes funciones:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{\operatorname{sen} x}, & x\neq 0\\[2ex] 1, & x=0\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} x\ e^{\left(\frac{x+1}{x}\right)}, & x\neq 0\\[2ex] 0, & x=0\end{cases}$$

18. Consideremos la función de coste de llamadas teléfonica por móvil (o estacionamiento de pago) que se calcula con un cargo fijo de 0,75 euros por establecimiento de llamada y depués 0,50 euros por cada minuto o fracción. Se pide:

a) Construir la expresión de la función y dibujar su gráfica en [0,5].

b) ¿En qué puntos existe el límite de la función y en cuáles no?

19. Recientemente uno de los pozos de agua de cierta ciudad se contaminó con tricloroetileno. Una propuesta indica que el costo de la eliminación de $x\,\%$ del contaminante esta dada por

$$C(x) = \frac{0{,}5x}{100 - x}, \text{ para } 0 < x < 100$$

a) Hallar el costo de la eliminación del 90 %.

b) ¿Cuanto costaría eliminarlo casi totalmente?

Los siguientes ejercicios tienen una componente eminentemente teórica. Deben ayudarte a repasar de forma exhaustiva la parte teórica de la asignatura y buscan que la estudies en un formato basado en el entendimiento y el razonamiento, más que en aspectos puramente memorísticos.

20. Desigualdades entre funciones y límites

Sean f, g y h tres funciones reales de variable real definidas al menos en un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}$. Probar las siguientes afirmaciones:

a) Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $k < l$, entonces existe un entorno de a tal que en todo punto x de dicho entorno se verifica $k < f(x)$.

b) Si existen $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$ y verifican que $l < m\,(l > m)$, entonces existe un entorno de a tal que en todo punto x de dicho entorno se verifica $f(x) < g(x)\,(f(x) > g(x))$.

c) Si existen $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = m$ y se verifica que $f(x) < g(x)\,(f(x) > g(x))$ en un entorno de a, entonces $l \le m\,(l \ge m)$

d) **Principio del bocadillo.** Si existe $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = l$ y además en un entorno de a se tiene que $f(x) \le h(x) \le g(x)$, entonces $h(x)$ admite límite en a y vale exactamente l.

21. Sea $f(x)$ una función que tiende a cero en el punto $x = 0$. Probar que para

$$F(x) = \frac{x^2 f(x)}{(f(x) - 1)(x^2 + f(x)^2)}$$

se verifica que $\lim_{x->0} F(x) = 0$.

22. Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, entonces existe un entorno, posiblemente muy pequeño, de a donde f y g son iguales. ¿Cierto o falso?

23. ¿Existe alguna función f acotada tal que exista $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ pero no existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)$?

24. Dar la definición en términos de $\varepsilon - \delta$ para cada una de los siguientes límites: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty(-\infty)$

25. Se sabe que $\lim_{x\to a} f(x) = l > 0(< 0)$, probar que entonces existe un entorno de a tal que en todo punto x de dicho entorno se verifica $0 < (>) f(x)$.

26. Se sabe que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que en todo punto de los semientornos de a, a la izquierda $a - \delta < x < a$, o a la derecha $a < x < a + \delta$ que $f(x)$ tiene signo constante, esto es, es siempre prositivo o negativo en cada semientorno, pudiendo ser el mismo en ambos lados o distinto. ¿Cierto o falso?

27. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $a < c < b$ verificando que
$$\lim_{x\to 0}(f(x + c) - f(c)) = 0.$$
Probar que
$$\lim_{x\to 0}(f(x + c) - f(c - x)) = 0.$$
Estudiar si el recíproco es cierto.

28. Estudiar el límite de la *función de Dirichlet*:
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
cuando $x \to 0$. ¿Qué ocurre cuando $x \to a$, $a \neq 0$?

29. Estudiar el límite de:
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
cuando $x \to 0$. ¿Qué ocurre cuando $x \to a$, $a \neq 0$?

TABLA DE INFINITÉSIMOS EQUIVALENTES:

$FUNCION:$	$INFINITESIMO:$	$PUNTO:$
$\operatorname{sen} x$	x	$x \to 0$
$\operatorname{tg} x$	x	$x \to 0$
$\operatorname{arc\,sen} x$	x	$x \to 0$
$\operatorname{arc\,tg} x$	x	$x \to 0$
$\ln(1+x)$	x	$x \to 0$
$\ln x$	$x-1$	$x \to 1$
$a^x - 1$	$x\ \ln a$	$x \to 0$
$1-\cos x$	$x^2/2$	$x \to 0$
$(1+x)^m - 1$	$m\ x$	$x \to 0$

Te presentamos a continuación las gráficas de algunos de estos infinitésimos para que visulizes el significado de esta relación.