ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007

Tema 3. Continuidad de funciones reales

Problemas propuestos

1. Averiguar si las funciones siguientes son continuas en el conjunto de puntos que se indica:

a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$. b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{1/x}+1}{3^{1/x}-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ en $\mathbb{R}$.

2. Estudiar en los puntos 0, -1 la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & 0 \leq x \\ x^2, & -1 < x < 0 \\ -2x-1, & x \leq -1, \end{cases}$$

3. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \ln(\cos x)$ en el intervalo cerrado $[0, 2\pi]$.

4. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = E[x]$, donde $E[x]$ la parte entera de x.

5. Se considera la función definida en $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} A + B\ \ln x, & x > 0 \\ C, & x = 0 \\ De^{3x} + \dfrac{E}{x^3}, & x < 0 \end{cases}$$

donde A, B, C, D y E son constantes reales. Encontrar condiciones sobre las constantes para que se verifique:

$$\begin{array}{ll} (a) & \lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \\ (b) & \lim_{x\to 0} f(x) = 2 \\ (c) & \lim_{x\to 0} f(x) = C \end{array}$$

6. Determinar, si es posible, los valores de a y b para los cuales las siguientes funciones son continuas:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ a + x & x \geq 0 \end{cases} \quad (b)\ f(x) = \begin{cases} a\ \cos x & x \leq 0 \\ \sqrt{4-x^2} & 0 < x < 1 \\ a + bx & 1 \leq x. \end{cases}$$

7. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1-x, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

definida en el intervalo $[0, 1]$.

Demostrar

a) La función únicamente es continua en el punto $x = \frac{1}{2}$.

b) Toma todos los valores comprendidos entre 0 y 1.

8. Estudiar la continuidad de:

$$(a)\ f(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{x-2}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad (b)\ f(x) = \begin{cases} \cos x\, e^{\operatorname{tg} x} & x \neq \pi/2 \\ 0 & x = \pi/2 \end{cases}$$

$$(c)\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{1+e^{1/x-2}} & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases} \qquad (d)\ f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$(e)\ f(x) = \frac{\ln(x^2-3x+2)}{\ln(x^2-7x+12)}$$

9. Una tarifa de larga distancia para una llamada telefónica es de 0,29€ por el primer minuto y de 0,20€ por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos, esboce la gráfica de f para $0 < t \leq 4{,}5$. Determinar los valores de t en los cuales la función es discontinua.

10. Un parking cobra 1€ por la primera hora (o fracción de hora) y 0,90€ por las siguientes horas (fracciones de hora), hasta un máximo de 10€ diarios. Representa gráficamente la función costo de estacionar un automóvil en función del tiempo. Analice las discontinuidades de la función y el significado para alguien que estaciona un vehículo.

11. Demostrar que la ecuación $x^5 - 2x^2 - 3x - 7 = 0$ tiene una solución y calcularla con una cifra decimal exacta.

12. Demostrar que existe algún $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^{139} + \frac{163}{1 + x + \operatorname{sen}^2 x} = 119$$

13. Demostrar que la ecuación $\cos x + x - 2 = 0$ tiene alguna raíz.

14. Mostrar que la ecuación $x = a\ \operatorname{sen} x + b$, donde $0 < a < 1$, $b > 0$ tiene al menos una raíz positiva no mayor que $a + b$.

15. a) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y periódica de periodo T. Demostrar que existen puntos que se diferencian en un semiperiodo y tienen la misma imagen, es decir, existe x_0 tal que $f(x_0) = f(x_0 + \frac{T}{2})$.

    b) Usar el resultado anterior para demostrar que, en un instante dado, hay dos puntos opuestos en el ecuador de la Tierra que tienen la misma temperatura.

16. *a*) Hallar una función f que sea discontinua en $1, 1/2, 1/3, \ldots$, pero continua en todos los demás puntos.

    b) Hallar una función f que sea discontinua en $1, 1/2, 1/3, \ldots$ y en 0, pero continua en todos los demás puntos.

17. ¿Existe una función que es discontinua en todos los puntos excepto en uno?. ¿Y únicamente en n puntos fijados cualesquiera?

18. Supóngase que f es una función que satisface $|f(x)| < |x|$ para todo $x \neq 0$ y $f(0) = 0$. Demostrar que f es continua en $x = 0$. ¿Podemos asegurar la continuidad en otro punto? ¿Sería posible que no fuese continua en níngún otro punto?

19. Supóngase que f es continua en $[a, b]$ y que $f(x)$ es siempre racional. ¿Qué puede decirse acerca de f?

20. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$, entonces existe una función g que es continua en todo $\mathbb{R}$, y que satisface $g(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Hágase ver con un ejemplo que esta afirmación es falsa si se sustituye $[a, b]$ por (a, b).

21. Sea $f(x)$ continua en [a,b] y $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$. Demostrar que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

22. Sea $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas sobre $\mathbb{R}$ tales que para todo número irracional $f(x) = g(x)$. ¿Qué podemos decir de f y g?

23. Sea f una función continua en $[a, b]$. Demostrar que existe algún número y tal que $|f(y)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$.

24. ¿Toda función continua es acotada? ¿Toda acotada es continua? ¿Toda función continua definida en un intervalo admite máximo o mínimo?

25. Como la imagen de un intervalo cerrado por toda función continua es otro intervalo cerrado, la imagen de una función continua en todo $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ es también todo $\mathbb{R}$. ¿Cierto o falso?

26. Si $f(x)$ está definida de forma biyectiva de $[0, 1]$ en $[0, 1]$, como toma todos los valores del intervalo, necesariamente es continua. ¿Cierto o falso?

27. Dar un ejemplo de una función f que no sea continua en ningún punto, pero tal que $|f|$ sea continua en todos los puntos.

28. ¿Existe alguna función f continua únicamente en los enteros?

29. Se sabe que f está definida y es finita en todo punto del intervalo $[a, b]$, además es continua en $[a, b] \setminus \{c\}$ pero se sabe que $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$. Entonces f es también continua en c. ¿Cierto o falso?

30. Sea f definida en un intervalo $[a, b]$ que verifica que $f(a)f(b) < 0$ y existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$, entonces f es continua. ¿Cierto o falso?