ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007

Tema 4. Derivabilidad de funciones reales

Problemas propuestos

Derivada de las funciones elementales

$D(\ln x) = \frac{1}{x}$	$D(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$	$D(e^x) = e^x$	$D(a^x) = a^x \ln a$
$D(x^k) = kx^{k-1},\ k \in \mathbb{R}$	$D(\operatorname{sen} x) = \cos x$	$D(\cos x) = -\operatorname{sen} x$	$D(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
$D(\operatorname{arc\,sen} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(\arccos x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$D(\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$D(sh\, x) = ch\, x$
$D(ch\, x) = sh\, x$	$D(\operatorname{argsh}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$D(\operatorname{argch}\ x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$D(\operatorname{argth}\ x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Estudiar la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } \ x \le 0 \\ e^{-x}, & \text{si } \ x > 0 \end{cases} \qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{si } \ x > 0 \\ 1, & \text{si } \ x = 0 \\ 1-x^2 & \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

$$(c)\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{x}, & \text{si } \ x > 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1}, & \text{si } \ x \le 0 \end{cases}$$

2. Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f'(x)$ y $f''(x)$ para todo número real x, y demostrar que $f^{(3)}(0)$ no existe.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ x+2 & \text{si } 2 \le x < 3 \\ 2x-1 & \text{si } 3 \le x < 4 \end{cases}$$

Se pide:

a) ¿Es continua la función en los puntos $x = 2$ y $x = 3$?.

b) ¿Es derivable en dichos puntos?

c) Dibujar la gráfica de la función y de la derivada.

4. Construir una función que verifique: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en todo $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$ tal que $f'(0^-) = 0,\ f'(0^+) = 1,\ f'(2^-) = 3,\ f'(2^+) = 5$.

5. Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\ x, & x \le c \\ ax+b, & x > c \end{cases}$$

Hallar a y b en función de c para que exista $f'(c)$.

6. Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva:

(a) $y = x^3 - 2x^2 + 4$ en el punto (2,4).

(b) $y = \operatorname{arc\,tg}(2x-3)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

7. Determinar los puntos en que la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$ presenta tangente paralela a la recta $y = 6x + 2$.

8. Demostrar que cuando x varía en el intervalo $(0, \pi/2)$ se verifica la desigualdad
$$3x < \operatorname{tg} x + 2 \operatorname{sen} x.$$

9. Probar que para todo valor real x distinto de cero se verifica que $1 + x < e^x$.

10. Determinar los valores de a, b, c para que exista $f''(1)$ obteniéndose en dicho caso $f''(x)$ siendo f la función
$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

11. Calcular las derivadas de orden n de las siguientes funciones

    a) $y = \ln(1 + x)$ b) $y = e^x$ c) $y = \dfrac{1}{1 + x}$

12. La función $\operatorname{tg} x$ toma valores iguales en $x = 0$ y $x = \pi$. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a esta función en $[0, \pi]$?

13. Mostrar que $x^3 - 3x + c$ no puede tener dos raíces reales y distintas en el intervalo $(0, 1)$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable cuya derivada segunda no se anula tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ y $f(2) = 1$. Demostrar que $f(x) = x$ tiene exactamente dos soluciones y deducir que la ecuación $f'(x) = 1$ tiene una única solución.

15. Demostrar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ sólo tiene una raíz real.

16. Supóngase que f es continua y derivable en $[0, 1]$, que $f(x)$ está en $[0, 1]$ para todo x y que $f'(x) \neq 1$ en $[0, 1]$. Demostrar que existe un único $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

17. Probar que la ecuación $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

18. Demostrar que $x^2 = 18 \ln x$ tiene una única solución en $(1, e)$.

19. Demostrar que la ecuación $x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0$ posee sólo una raíz positiva.

20. Sobre la curva $y = x^3$ hallar el punto en el que la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $A(-1, -1)$ y $B(2, 8)$.

21. Sean las funciones
$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 + 1, \qquad g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x.$$
    Probar que
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)}, \quad \forall x \in (0, 1).$$
    ¿No contradice este hecho el teorema del valor medio de Cauchy?

22. Suponiendo que un globo esférico se infla de modo tal que, en el tiempo t (medido en segundos), su radio es $2t$ centímetros,

    a) ¿Cuál es la razón promedio de cambio de su área superficial del tiempo $t = 1$ al tiempo $t = 2$?

    b) ¿Cuál es la razón instantánea de cambio de su área superficial cuando $t = 2$?

23. La longitud de una acequia horizontal es de 4 m; su sección transversal es un trapecio; el fondo tiene un metro de ancho; el seno del ángulo entre sus caras laterales y el plano horizontal es 4/5. Se vierte agua en la artesa a razon de 1/4 m^3 por minuto. ¿ Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando el agua tiene 60 cm. de profundidad?

24. Una placa de metal de forma circular se dilata bajo la acción del calor de tal modo que su radio crece uniformemente a razón de 0,01 cm/s. ¿Cuánto vale el crecimiento de su área cuando el radio vale 2 cm?

25. Una escalera de longitud L está apoyada en el suelo (horizontal) y en una pared (vertical). El punto de apoyo en la pared está a y cm del suelo y el punto de apoyo en el suelo está a x cm de la pared, siendo $x < y$. Suponiendo que la escalera resbala de modo que x aumenta a una velocidad constante de 20 cm/seg, ¿con qué velocidad está disminuyendo y en el instante en que el ángulo de inclinación de la escalera sobre el suelo es de 30°?

26. Un tanque tiene forma de cono invertido, con base de 6 m de radio y 2 m de profundidad. Se vierte agua en el tanque a razón de 20 *l/min*. ¿Con qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando éste es de 1 metro sobre el fondo?

27. **Unas cuestiones para ayudarte a estudiar el tema.** Al igual que en los temas anteriores, te presentamos a continuación una serie de cuestiones cortas que te ayuden a repasar los conceptos del tema.

    a) ¿Toda función continua es derivable?

    b) Una función definida a trozos puede ser continua pero nunca derivable, ¿Cierto o falso?

    c) Toda función derivable en un punto es continua. ¿Cierto o falso?

    d) Toda función derivable en un intervalo es monótona (creciente o decreciente) en dicho intervalo. ¿Cierto o falso?

    e) Si f es derivable en un intervalo y creciente, entonces $f'(x) \neq 0$ en dicho intervalo. ¿Cierto o falso?

    f) Toda función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ sabemos que admite máximo y mínimo (Teorema de Weiertrass). ¿Si es derivable se tiene entonces necesariamente que su derivada se anula al menos en dos puntos (su máximo y su mínimo)?

    g) Si $f'(a) \neq 0$ entonces existe un entorno (posiblemente muy pequeño) de a donde f no se anula. ¿Cierto o falso?

    h) Si alguna derivada lateral de una función f en un punto a es infinito, entonces necesariamente la imagen de la función en dicho punto $f(a)$ también es infinito, como pasa con la función $f(x) = 1/x$ en $a = 0$. ¿Cierto o falso?

    i) Si f no es derivable en un punto a entonces dicho punto no puede ser ni máximo ni mínimo de la función.

    j) Dos funciones derivables se cortan en un punto, entonces tiene igual derivada en dicho punto de corte. ¿Cierto o falso?

    k) Si f es derivable pero g no lo es, entonces su producto no puede ser derivable. ¿Cierto o falso?

    l) Sea f una función derivable en un intervalo I. Toda recta tangente a la curva en cualquier punto del intervalo I admite una recta paralela que es también la recta tangente a la curva en otro punto. ¿Cierto o falso?

m) Determinar la verdad o falsedad del siguiente razonamiento: Sea f una función derivable que verifica $f(a) = f'(a) = 0$ para un cierto punto a, entonces por el Teorema del valor medio se tiene para cualquier otro punto x

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) = 0$$

y por tanto $f(x) = 0$.

n) Sea f una función definida en todo $\mathbb{R}$ que verifica que tiene derivada nula en todo punto donde es derivable. ¿Es necesariamente constante?