ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007

Tema 5. Aplicaciones del Cálculo Diferencial

Problemas propuestos

1. Comprobar :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

2. Calcular aplicando la regla de L'Hopital los siguientes límites:

$$(a) \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\cos x} - \operatorname{tg} x\right] \quad (b) \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{1 - \cos x}$$

$$(c) \lim_{x\to k} \left(4 - \frac{3x}{k}\right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2}\frac{x}{k}}$$

3. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arc\,sen} x}{x}\right)^{\dfrac{1}{x^2}}$$

4. Calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{arc\,tg} x)^{\dfrac{1}{ln\ x}} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to\infty} (ln\ x)^{\dfrac{1}{1 - ln\ x}} \qquad \lim_{x\to 1} \left(\frac{4\ \operatorname{arc\,tg} x}{\pi}\right)^{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{cotg}^2 x} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(3 + 2\, e^{\operatorname{tg} x}\right)^{\pi - 2x}$$

5. Sea:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}, & si\ x \le 0 \\[2ex] \dfrac{e^x}{x}, & si\ x > 0 \end{cases}$$

a) Dominio de f. ¿Para que valores de f es continua y para que valores de f es derivable?.

b) Crecimiento y decrecimiento de la función. Máximos y mínimos relativos.

c) Concavidad y convexidad.

d) Estudiar si f tiene máximos o mínimos absolutos.

6. Se considera la función $f(x) = \ln((x-1)^2(x+2))$.

a) Indicar para que valores de x la función está definida, es continua y derivable. Calcular f' en los puntos donde exista.

b) Estudiar el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

c) Calcular razonadamente el número de puntos de corte con el eje OX (no es necesario calcular el valor de esos puntos).

7. Dada la función f definida para todo x real por:

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$$

Se pide:

a) Distintos intervalos a considerar para el estudio de f.

b) Continuidad y derivabilidad de f.

c) Máximos y mínimos absolutos y locales.

d) Puntos de inflexión. Concavidad y convexidad.

8. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^4 \cos^2 \dfrac{1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

(i) Hallar $f'(1)$.
(ii) ¿Existe $f''(1)$?
(iii) ¿Admite f un extremo relativo en $x = 1$? ¿Se trata de un máximo o de un mínimo? Razonar la respuesta.

9. Estudio y representación gráfica de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \dfrac{x^2-3}{x^3} & b) f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4} \\ c) f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2} & d) f(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \\ e) f(x) = \dfrac{x}{\log x} & f) f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+4} \\ g) f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1} & h) f(x) = x - 2\arctan x \\ i) f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x & j) f(x) = \log \dfrac{x+1}{1-x} \end{array}$$

10. Un fabricante quiere diseñar una caja abierta que tenga una base cuadrada y un área superficial de $108 dm^2$. ¿Qué dimensiones producirá una caja con volumen máximo?

11. ¿Qué puntos de la gráfica $y = 4 - x^2$ son más cercanos a el punto (0,2)?

12. Una hoja de papel, de forma rectangular, debe contener 18 cm^2 de texto impreso. Los márgenes superior e inferior han de ser ambos de 2 cm; los laterales de 1 cm. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la página para que se use la menor cantidad de papel?

13. Las distancias de dos pueblos A y B a un río que pasa en línea recta al mismo lado de ambos, son de 10 km y 15 km. La proyección del segmento AB sobre el río es de 20 km. Se quiere construir un depósito en la orilla del río para el aprovisionamiento de agua de ambos pueblos. ¿ En qué punto debe instalarse el depósito para que la longitud de los tubos de conducción, en línea recta, sea la menor posible?

14. Se van a usar 4m de alambre para formar un cuadrado y un circulo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?

15. Entre todos los rectángulos con perímetro fijo P. ¿ Cuál es el de mayor área?

16. Una hoja rectangular, de perímetro igual a 36 cm, se enrolla formando un cilindro. Determinar las dimensiones de la hoja para que el volumen del cilindro sea máximo.

17. Una empresa fabrica un artículo que vende a 400 euros la unidad. El coste total para colocar en el mercado x unidades de dicho artículo viene dado por la función $c(x) = 0,02x^2 - 160x + 400000$ ¿ Cuántos artículos será preciso vender para obtener un beneficio máximo ?

18. La base menor de un trapecio rectángulo mide 10 cm y el lado oblicuo 20 cm. Hallar el ángulo que debe formar dicho lado con la base mayor para que el área del trapecio resulte máxima.

19. Una ventana de forma rectangular, rematada por un arco de medio punto, tiene un perímetro de 12 metros. ¿ Cuáles deben ser dimensiones para que su superficie sea lo mayor posible?

20. En una esfera de radio R inscribir un cono de volumen máximo.

21. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

22. Un depósito de chapa está formado por un cilindro de radio R y altura H, cerrado en sus dos extremos por medio de semiesferas. La superficie total es constante e igual a 2π m^2. Hallar R y H para que el volumen sea máximo.

23. Hay que reforzar un muro de 10 metros de altura con una viga que debe pasar por encima de una valla paralela de 5 metros de altura situada a 4 metros del muro. Calcule la longitud mínima de esa viga.

24. Se considera la parábola $y = -x^2 + 12$ y el triángulo formado en el primer cuadrante por los semiejes positivos y una tangente a dicha curva. Determinar el punto de tangencia de forma que el área de dicho triángulo sea mínima.

25. Dada la elipse $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{28} = 1$, trazar una tangente de modo que el área del triángulo engendrado por dicha tangente y los ejes de coordenadas sea la menor posible. ¿ Por qué punto de la elipse debe pasar dicha recta?.