

Análisis Matemático I  
Curso 2004/05 - Convocatoria de Septiembre

Alumno: \_\_\_\_\_

1. Contestar de razonadamente las siguientes cuestiones:

(a) Una función  $f(x)$  se sabe que es estrictamente creciente en un intervalo  $[a, b]$ , luego para cualquier  $k \in \mathbb{R}$  verificando que  $f(a) < k < f(b)$  se tiene que existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = k$ .

(b) Existe alguna función acotada  $f(x)$  que verifique en un punto  $a$  que exista  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  pero no exista  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

(c) Se sabe que una función  $f(x)$  verifica el Teorema del Valor Medio para todo punto de un intervalo  $[a, b]$ , esto es,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x), \forall x \in [a, b].$$

¿Qué podemos decir de  $f(x)$ ?

(d) Sea  $f$  definida en un intervalo  $[a, b]$  que verifica que  $f(a)f(b) < 0$  y existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ , entonces  $f$  es continua. ¿Cierto o falso?

(e) Sea  $f(x)$  una función continua y  $g(x)$  una función acotada tal que su producto  $f(x)g(x)$  es continua, ¿es  $g(x)$  continua?

2. Sean  $f, g$  y  $h$  tres funciones reales de variable real definidas al menos en un entorno reducido de un punto  $a \in \mathbb{R}$ . Probar el **principio del bocadillo**: Si existe  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$  y además en un entorno de  $a$  se tiene que  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ , entonces  $h(x)$  admite límite en  $a$  y vale exactamente  $l$ .

3. Encontrar los números reales que cumplen:  $|x + 1| - |x - 2| \geq 2$

4. Probar que la ecuación  $x^2 = x \operatorname{sen} x + \cos x$  tiene exactamente dos soluciones.

5. Dada la función  $f$  definida para todo  $x$  real por:

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}$$

Se pide:

a) Distintos intervalos a considerar para el estudio de  $f$ .

b) Continuidad y derivabilidad de  $f$ .

c) Máximos y mínimos absolutos y locales.

d) Puntos de inflexión. Concavidad y convexidad.

6. Se quiere construir una caja abierta con base cuadrada, empleando  $108 \text{ cm}^2$  de material. ¿Qué dimensiones producirán una caja de volumen máximo?

**NOTA:** Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.