

Análisis Matemático I
Curso 2005/06 - Convocatoria de Septiembre

Alumno: _____

1. Contestar razonadamente **sólo CINCO de las** siguientes cuestiones:

- a) Determinar dos números irracionales que estén contenidos en el intervalo $(1000, 1001)$.
- b) En un punto a se sabe que las funciones $f(x)$ y $g(x)$ satisfacen lo siguiente:
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$ existe y es finito
 - $f(x)$ es continua en a
 - $g(x)$ es acotada en todo entorno de a y $g(a) = 0$
- ¿Podemos asegurar que $g(x)$ es continua en a ? ¿o al menos que tiene una discontinuidad evitable?
- c) Sea $f(x)$ una función continua en un punto a . Para $\varepsilon = 10^{-2}$ se sabe que le corresponde un $\delta = 10^{-3}$ en la definición de continua en el punto a . Si tenemos en cuenta que $f(a) = 3$, ¿qué podemos decir del valor de $f(x)$ para cualquier punto $x \in (a - \delta, a + \delta)$?
- d) Se sabe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, por tanto para x suicientemente grande, muy grande, $f(x) = g(x)$. ¿Cierto o falso?
- e) Una función está definida de forma sobreyectiva de $[0, 1]$ en $[0, 1]$. Estudiar si es cierta la siguiente equivalencia:

$$f \text{ es continua} \Leftrightarrow f \text{ es biyectiva}$$

En caso negativo proporcionar un contraejemplo.

- f) Determinar la verdad o falsedad del siguiente razonamiento: Sea f una función derivable que verifica $f(a) = f'(a) = 0$ para un cierto punto a , entonces por el Teorema del Valor Medio se tiene que $f(x) = 0$ para cualquier punto x de un entorno posiblemente muy pequeño de a ya que

$$f(x) = f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) = 0$$

- g) Si alguna derivada lateral de una función f en un punto a es infinito, entonces necesariamente la imagen de la función en dicho punto $f(a)$ también es infinito. ¿Cierto o falso?

2. Se sabe que $f(x)$ es una función continua y derivable en un intervalo $[a, b]$, entendiéndose en los extremos que existe la derivada lateral correspondiente. Por ser continua ya se sabe que admite unos valores máximos y mínimos en dicho intervalo.
- Si estos máximos y mínimos no se alcanzasen en ninguno de los puntos extremos del intervalo, ni en a ni en b , entonces necesariamente $f'(x)$ se anularía en al menos dos puntos de (a, b) . ¿Cierto o falso? Justifica tu respuesta.
 - Si el máximo o el mínimo se alcanzase en a o en b , ¿se anularía también la derivada (lateral) en estos puntos? Probarlo en caso afirmativo o dar un contraejemplo en caso negativo.
 - Dar condiciones sobre $f'(a^+)$ y sobre $f'(b^-)$ que aseguren que los máximos y mínimos de f se encuentran todos en (a, b)
3. a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
- b) Estudiar el límite cuando $x \rightarrow 0$ de

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{\sin x}} - 1}{e^{\frac{1}{\sin x}} + 1}$$

4. Demostrar que $x^2 = 18 \ln x$ tiene una única solución en $(1, e)$.
5. Estudiar y representar gráficamente

$$f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$$

6. Se utiliza 20 metros de hilo para formar un cuadrado y un triángulo equilátero. ¿Cuánto hilo hay que emplear en cada una para lograr que el área encerrada sea máxima?

NOTA: Todas las preguntas tienen igual puntuación. Duración máxima del examen: 5 horas.