

Problemas de optimización con un máximo en un extremo

Un error muy común al resolver problemas de optimización es considerar que los máximos o mínimos se alcanzan **únicamente** en los puntos donde se anula la primera derivada. El siguiente ejemplo muestra que esto no es siempre así.

Ejemplo: Se usan 4 metros de alambre para construir un cuadrado y un círculo. ¿Qué cantidad de alambre debe usarse para el cuadrado y qué cantidad para el círculo a fin de abarcar la máxima área total?

El área total está dada por

$$A = \text{área del cuadrado} + \text{área del círculo} = x^2 + \pi r^2$$

donde x denota la longitud del lado del cuadrado y r , el radio del círculo.

Como la longitud del alambre es de 4 metros, se obtiene

$$4 = \text{perímetro del cuadrado} + \text{longitud del círculo} = 4x + 2\pi r$$

De tal modo que, $r = \frac{2(1-x)}{\pi}$, y sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos:

$$A = x^2 + \pi \left(\frac{2(1-x)}{\pi} \right)^2 = x^2 + \frac{4(1-x)^2}{\pi}$$

donde $0 \leq x \leq 1$, ya que podríamos usar todo el alambre en el círculo ($x = 0$), o como máximo el lado del cuadrado puede medir 1 si utilizamos todo el alambre en el cuadrado.

Por tanto tenemos una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado y por el teorema de Weierstrass alcanza máximo, ahora bien, este puede estar entre los puntos que anulan la derivada o en los extremos del intervalo, ya que no existen puntos donde la función no sea derivable.

Como

$$A'(x) = \frac{2(\pi + 4)x - 8}{\pi}$$

El único punto crítico en $(0,1)$ es $x = \frac{4}{\pi+4} \simeq 0,56$.

Así, utilizando que

$$A(0) \simeq 1,273, \quad A(0,56) \simeq 0,56 \quad \text{y} \quad A(1) = 1$$

Puede concluirse que el área máxima ocurre en el extremo $x = 0$. Esto es, todo el alambre se usa para el círculo.

Presentamos la gráfica de la función $A(x)$ donde se observa claramente lo estudiado anteriormente.

