ANÁLISIS MATEMÁTICO I. Curso 2006-2007.

Tema 1 - Números reales.

Propiedades fundamentales de los números racionales

Resumimos las propiedades fundamentales de los números racionales que ya conoces, para abordar a continuación el estudio de otras propiedades nuevas que nos ayudarán a iniciar el estudio de los números reales.

El conjunto de números racionales se describe de la siguiente forma

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \,:\, p, q \in \mathbb{Z},\, q > 0\}.$$

En $\mathbb{Q}$ se definen las operaciones (internas, que dan resultados en el mismo $\mathbb{Q}$), de suma y producto que están definidas mediante:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs}, \quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}$$

Con respecto a estas dos operaciones, se verifica que $\mathbb{Q}$ tiene estructura de **cuerpo**, esto es, verifica las siguientes propiedades: Sean $a, b, c \in \mathbb{Q}$

- Asociativa para la suma: $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Conmutativa para la suma: $a + b = b + a$
- Elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$
- Elemento opuesto para la suma: $\exists - a \in Q :\ a + (-a) = 0$
- Asociativa para el producto: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Conmutativa para el producto: $a \cdot b = b \cdot a$
- Elemento neutro para el producto: $a \cdot 1 = a$
- Elemento inverso para el producto: Si $a \neq 0$, existe $a^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$
- Distributiva: $(a + b) \cdot c = a \cdot c + (b \cdot c)$

En $\mathbb{Q}$ se puede definir también una relación de orden total, "ser menor o igual $\leq$". Recordemos lo que significa:

$$\frac{p}{q} \leq \frac{r}{s} \Longleftrightarrow ps \leq qr \quad \text{(recordar que } q, r > 0\text{)}.$$

NOTA: $\leq$ se dice que es una relación de **orden** en un conjunto C si satisface las propiedades siguientes:

- Reflexiva: $c \leq c$ para todo $c \in C$
- Antisimétrica: si $c \leq c'$ y $c' \leq c$, entonces $c = c'$
- Transitiva: si $c \leq c'$ y $c' \leq c''$, entonces $c \leq c''$

y decimos que es de **orden total** si además verifica:

- Orden total: para cualesquiera $c, c' \in C$ se tiene que bien $c \leq c'$ o bien $c' \leq c$.

Combinando estas propiedades, como se tiene que

- $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
- $a \leq b \implies a \cdot c \leq b \cdot c$ para cuaqluier $c > 0$

se dice que $\mathbb{Q}$ es un **cuerpo ordenado**.

El objetivo ahora es probar unas propiedades que posiblemente ya no sean tan familiares.

Proposición 1 *$\mathbb{Q}$ es* **denso***, esto es, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$ siempre existe $c \in \mathbb{Q}$ tal que $a < c < b$.*

Proposición 2 *$\mathbb{Q}$ es* **arquimediano***, esto es, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.*

Proposición 3 *$\mathbb{Q}$ es* **infinito numerable***, esto es, existe una aplicación biyectiva entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$.*