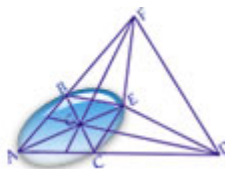


# Mundo de las Matemáticas



Caracter lúdico de las curiosidades matemáticas

| José Rosales O | Pedro Díaz N. | [Revista Digital Matemática, Educación e Internet](#) |

[Inicio](#) [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#) [12](#) [13](#)

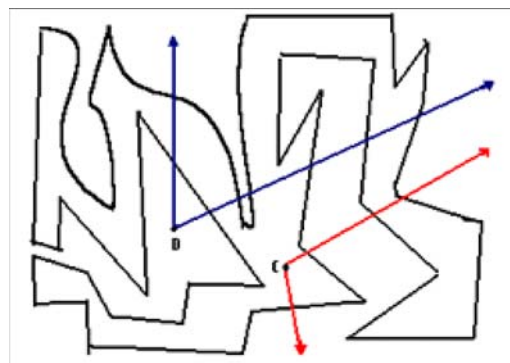
## El teorema de la curva de Jordan Brouwer

Este teorema es un resultado cuya demostración es bastante elaborada y necesita de un alto nivel de matemática para su formalización. Sin embargo, intuitivamente dice algo bastante sencillo. El esencia, el teorema de la curva cerrada de Jordan Brouwer indica que cualquier curva cerrada simple separa el plano en tres regiones disjuntas: el exterior, el interior y la curva misma.

(Teorema de la curva de Jordan) Sea  $C$  una curva cerrada simple en el plano.<sup>6</sup> Entonces  $C$  separa al plano en exactamente dos componentes  $W_1$  y  $W_2$ . Cada uno de los conjuntos  $W_1$  y  $W_2$  tiene a  $C$  como su frontera.

Este teorema es intuitivamente evidente si la curva es simple muy simple como es el caso de un círculo. Pero si la curva fuese considerablemente más compleja, el resultado no sería tan evidente a simple vista.

Lo interesante es este caso y que es de utilidad en un contexto de primaria y secundaria son los resultados que llevan a la demostración del teorema. La demostración usa el hecho de que un punto  $P$  cualquiera estará "adentro" de la curva si al trazar un rayo con origen en  $P$  en cualquier dirección y de forma que el rayo corte a la curva de forma transversal<sup>7</sup> en todo punto de intersección, entonces el número de cortes será un número impar. De lo contrario, esto es, si el punto se encuentra "afuera" de la curva, entonces cualquier rayo con origen en  $P$  que corte transversalmente a la curva lo hará un número par de veces. En el dibujo podemos apreciar como el punto  $C$  se encuentra dentro de la curva y no importa en la dirección que tracemos un rayo transversal, este cortara la curva un número impar de veces. Por otro lado, el punto  $D$  esta fuera de la curva y cualquier rayo trazado desde el que corte la curva transversalmente, lo hará un número par de veces.



# El Teorema de la Curva de Jordan

## *Jordan's Curve Theorem*

Francisco García Arenas (farenas@ualm.es)

María Luz Puertas (mpuertas@ualm.es)

**Área de Geometría y Topología.**

**Facultad de Ciencias Experimentales.**

**Universidad de Almería.**

**04071 Almería. España.**

### Resumen

En este trabajo se presentan los materiales didácticos correspondientes a una demostración reciente y especialmente simple (debida a R. Maehara) del Teorema de la curva de Jordan. También se incluyen demostraciones muy simples del Teorema del punto fijo de Brouwer y del Teorema Fundamental del Álgebra.

**Palabras y frases clave:** Teorema del punto fijo de Brouwer, Teorema de la curva de Jordan, Teorema Fundamental del Álgebra.

### Abstract

In this paper some didactic materials are presented, corresponding to a recent and specially simple proof (by R. Maehara) of Jordan's curve Theorem. Very simple proofs of Brouwer's fixed point Theorem and the Fundamental Theorem of Algebra are also included.

**Key words and phrases:** Brouwer's fixed point Theorem, Jordan's curve Theorem, Fundamental Theorem of Algebra.

## 1 Introducción.

Si hay un teorema *evidente* y *difícil* en topología, ese es el Teorema de la curva de Jordan. *Evidente* en el sentido de que su enunciado puede ser comprendido por cualquiera, incluso sin formación matemática, y no sólo lo comprenderá sino que además percibirá como cierto lo que dice (Por poner un ejemplo, el Teorema de los cuatro colores también tiene un enunciado comprensible por cualquiera, pero no es en absoluto evidente que lo que afirma sea cierto, así que no entra en esta categoría). *Difícil* en el sentido de que una demostración rigurosa del teorema lo es. El Teorema de la curva de Jordan es casi el único en esas condiciones.

Dado el carácter excepcional del teorema, todo lo que sea presentar una demostración lo más sencilla posible del mismo es un avance del máximo interés en la docencia de la Topología (y de las Matemáticas en general). La demostración que presentamos se debe a Maehara (véase [6]) y es bastante reciente, de 1984. Entre las virtudes de la demostración nos gustaría destacar las siguientes:

1. Es elemental. Esto es, no requiere más conocimientos que aquellos que se puedan explicar en la asignatura de topología que nos ocupa; no requiere complejas teorías de homotopía o de homología.
2. Es clara. Es decir, uno puede ilustrarla con un dibujo y el alumno podrá percibir el significado geométrico de cada paso que se da en la demostración, a diferencia de las demostraciones habituales, en las que aparece como corolario de teorías sumamente potentes, lo que hace que no se perciba con claridad dónde reside la dificultad de su demostración.
3. Es breve. O sea, dentro de lo que cabe. No es tan breve como las demostraciones homológicas en las que el caso  $n$ -dimensional general apenas tiene dos líneas (lo que da idea de la potencia de la teoría empleada), pero con esas demostraciones el teorema queda un poco deslucido: parece difícil catalogarlo como difícil e importante después de una demostración tan breve. Pero tampoco tiene la desmesura de alguna de las demostraciones que usan aproximaciones por poligonales y que están llenas de tediosos detalles técnicos que hacen que se pierda de vista el objetivo final.

Dado el carácter didáctico de esta exposición, presentamos también todos aquellos resultados previos necesarios para la misma, que se reducen básicamente a tres: el concepto de homotopía (pero no es necesario hablar

de grupo fundamental, con lo cual los métodos aquí usados no pueden propiamente considerarse Topología Algebraica) y el teorema del punto fijo de Brouwer.

En lo que sigue denotamos mediante  $D$  al disco cerrado unitario en  $\mathbb{R}^2$ , centrado en el origen, y mediante  $S^1$  a su borde, la circunferencia unitaria. A continuación, presentamos una definición formal del objeto de nuestro estudio.

**Definición 1.1.** Una curva de Jordan (en  $\mathbb{R}^2$ ) es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1$ .

Resulta un sencillo ejercicio de espacios topológicos cocientes ver que  $\alpha(I)$  es homeomorfo a  $S^1$  si y sólo si  $\alpha$  es una curva cerrada y simple, es decir, una aplicación  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua (donde  $I = [0, 1]$ ) tal que  $\alpha(0) = \alpha(1)$  (cerrada) y  $\alpha$  es inyectiva en  $[0, 1[$  (simple).

## 2 El Teorema del punto fijo de Brouwer.

Presentamos una demostración breve y elegante del Teorema del punto fijo de Brouwer procedente de [3]. En dicha demostración sólo se involucra el concepto de homotopía en términos de relación de equivalencia, sin necesidad de hablar de grupos de homotopía. Eso simplifica mucho la exposición y reduce enormemente los requisitos. Incluso hemos obviado la notación habitual de aplicaciones esenciales e inesenciales, optando por incluir el contenido de dicha definición en los teoremas (para lo poco que se usa, nos parecía un nombre superfluo y además confuso, porque se hace difícil recordar cuáles eran las inesenciales y cuáles las esenciales). En fin, dicho de manera coloquial, es como hacer Topología Algebraica sin Álgebra.

**Definición 2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Una homotopía de  $X$  a  $Y$  es una aplicación  $H : X \times I \rightarrow Y$  continua. Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas, y se nota  $f \sim g$ , si existe una homotopía  $H$  de  $X$  en  $Y$  tal que  $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ , donde  $H_t(x) = H(x, t)$  para todo  $t \in I$  y para todo  $x \in X$ .

El primer resultado establece la propiedad básica del concepto de homotopía.

**Lema 2.2.** La relación de homotopía es de equivalencia.

**Demostración:** Sean  $f, g, h : X \rightarrow Y$  funciones continuas entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ .

1.  $f \sim f$

Basta tomar  $H(x, t) = f(x)$  para todo  $x \in X, t \in I$ .

2. Si  $f \sim g$ , entonces  $g \sim f$ .

Sea  $F : X \times I \rightarrow Y$  continua con  $F_0 = f, F_1 = g$ . Definamos  $H : X \times I \rightarrow Y$  como  $H(x, t) = F(x, 1 - t)$ . Entonces  $H$  es continua (ejercicio) y  $H_1 = F_0 = f$  y  $H_0 = F_1 = g$ .

3. Si  $f \sim g$  y  $g \sim h$ , entonces  $f \sim h$ .

Sean  $F, G : X \times I \rightarrow Y$  continuas con  $F_0 = f, F_1 = g, G_0 = g$  y  $G_1 = h$ . Definamos  $H : X \times I \rightarrow Y$  como

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces  $H$  es continua (ejercicio) y  $H_0 = F_0 = f$  y  $H_1 = G_1 = h$ .

□

El próximo lema es el primero de una serie de cuatro cuyo objetivo final es demostrar que la aplicación identidad de  $S^1$  en  $S^1$  no es homotópica a una aplicación constante (lo que se llama una aplicación esencial). Para ello, primero se prueba que las aplicaciones no sobreyectivas que llegan a  $S^1$  tienen un logaritmo continuo, para a continuación determinar que la propiedad de tener un logaritmo continuo es invariante por homotopías (eso se llevará dos lemas) y obtener finalmente la equivalencia entre las propiedades de tener un logaritmo continuo y la de ser homotópica a una aplicación constante, de donde el resultado deseado será un mero corolario.

**Lema 2.3.** *Si  $f : X \rightarrow S^1$  es una aplicación continua con  $f(X) \neq S^1$ , entonces  $f$  tiene un logaritmo continuo. Es decir, existe  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) = e^{i\phi(x)}$  para todo  $x \in X$ .*

**Demostración:** Sea  $q \in \mathbb{R}$  tal que  $e^{iq} \notin f(X)$  (pues por hipótesis existe  $u \in S^1 \setminus f(X)$ ). La aplicación  $\exp : ]q, q + 2\pi[ \rightarrow S^1 \setminus \{e^{iq}\}$  definida como  $\exp(t) = e^{it} = (\cos t, \sin t)$  es un homeomorfismo. Llamaremos  $L$  a su inversa  $L : S^1 \setminus \{e^{iq}\} \rightarrow ]q, q + 2\pi[$ , que es continua.

Así pues es posible definir la aplicación  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  como la composición  $\phi(x) = L(f(x))$  para todo  $x \in X$ , ya que la imagen por  $f$  de  $X$  está dentro del dominio de  $L$ ;  $\phi$  es continua y verifica que  $e^{i\phi(x)} = e^{iL(f(x))} = f(x)$ . □

**Lema 2.4.** Sean  $f_1, f_2 : X \rightarrow S^1$  continuas con

$$|f_1 - f_2| = \sup\{|f_1(x) - f_2(x)| : x \in X\} \leq 1.$$

Entonces  $f_1$  tiene un logaritmo continuo si y sólo si  $f_2$  también lo tiene.

**Demostración:** Definamos  $h : X \rightarrow S^1$  como  $h(x) = f_1(x)/f_2(x)$  ( $h$  está bien definida pues es un cociente de elementos de  $S^1$  considerados como números complejos, lo cual da como resultado un elemento de  $S^1$ ). Entonces

$$\begin{aligned} |h(x) - 1| &= \left| \frac{f_1(x)}{f_2(x)} - 1 \right| = \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{|f_2(x)|} \\ &= |f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1 - f_2| \leq 1 \end{aligned}$$

por hipótesis; luego  $h$  no es sobreyectiva, ya que si  $-1 \in h(X)$  entonces tendríamos  $|-1 - 1| = 2 > 1$ , así que  $-1 \notin h(X)$ . Aplicando el lema anterior, existe  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f_1(x)/f_2(x) = h(x) = e^{i\phi(x)}$  para todo  $x \in X$ .

Supongamos ahora que  $f_1$  tiene un logaritmo continuo, es decir, que existe  $\phi_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_1(x) = e^{i\phi_1(x)}$  para todo  $x \in X$ ; entonces  $\phi_1 - \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y como  $f_2 = f_1 h^{-1}$ , tenemos que  $f_2 = e^{i(\phi_1 - \phi)(x)}$ .

Recíprocamente, si  $f_2$  tiene un logaritmo continuo, es decir, existe  $\phi_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f_2(x) = e^{i\phi_2(x)}$  para todo  $x \in X$ , entonces  $\phi_2 + \phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y como  $f_1 = f_2 h$ , tenemos que  $f_1(x) = e^{i(\phi_2 + \phi)(x)}$ .  $\square$

**Lema 2.5.** Sea  $X$  compacto y  $H : X \times I \rightarrow S^1$  una homotopía. Entonces  $H_0$  tiene un logaritmo continuo si y sólo si  $H_1$  tiene un logaritmo continuo.

**Demostración:** Como  $X \times I$  es compacto y  $H$  es continua,  $H$  es uniformemente continua, luego en particular existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que si  $|s - t| \leq 1/n$ , entonces  $|H(x, t) - H(x, s)| < 1$  para todo  $x \in X$ .

Sea  $f_j = H_{j/n}$ ; entonces

$$|f_{j+1}(x) - f_j(x)| = \left| H\left(x, \frac{j+1}{n}\right) - H\left(x, \frac{j}{n}\right) \right| < 1$$

para todo  $x \in X$ , ya que  $|(j+1)/n - j/n| = 1/n$ .

Aplicando el lema anterior, tenemos que  $f_{j+1}$  tiene logaritmo continuo si y sólo si  $f_j$  tiene un logaritmo continuo, lo que reiterando el proceso desde 0 hasta  $n$ , gracias a la transitividad de la relación de homotopía, da que  $f_0 = H_0$  tiene un logaritmo continuo si y sólo si  $f_n = H_1$  lo tiene.  $\square$

**Lema 2.6.** *Sea  $X$  compacto y  $f : X \rightarrow S^1$  una aplicación continua;  $f$  es homotópica a una aplicación constante si y sólo si  $f$  tiene un logaritmo continuo.*

**Demostración:** Sea  $H : X \times I \rightarrow S^1$  una homotopía con  $H_0 = f$  y  $H_1 = a$ , constante. Como  $H_1$  tiene un logaritmo continuo ( $\phi(x) = q$  para todo  $x \in X$ , con  $q$  un número real que verifique  $e^{iq} = a$ ), por el lema anterior  $H_0 = f$  tiene un logaritmo continuo.

Recíprocamente, supongamos que  $f$  tiene un logaritmo continuo, es decir, existe  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $f(x) = e^{i\phi(x)}$ . Definamos  $H : X \times I \rightarrow S^1$  como  $H(x, t) = e^{it\phi(x)}$  para todo  $t \in I$  y para todo  $x \in X$ .  $H$  es continua y  $H_0$  es constantemente 1 mientras que  $H_1 = f$ , luego  $f$  es homotópica a una constante.  $\square$

**Corolario 2.7.** *Sea  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  y sea  $\psi_n : S^1 \rightarrow S^1$  definida por  $\psi_n(z) = z^n$  para todo  $z \in S^1$ . Entonces  $\psi_n$  no es homotópica a una aplicación constante.*

**Demostración:** Si lo fuera, por el Lema 2.6 tendría un logaritmo continuo y por lo tanto existiría  $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  continua tal que  $\psi_n = e^{2\pi i\phi(x)}$  (basta con tomar como  $\phi$  el resultado de dividir el logaritmo continuo que proporciona el lema anterior por  $2\pi$ ). Ahora bien, dado  $x \in S^1$ , existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tal que  $x = e^{2\pi i\theta}$ , lo cual sustituido en la anterior igualdad nos da

$$e^{2n\pi i\theta} = e^{2\pi i\phi(e^{2\pi i\theta})}.$$

Así pues la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(\theta) = \phi(e^{2\pi i\theta}) - n\theta$  es continua y verifica que  $e^{2\pi i f(\theta)} = 1$ . Como  $e^{2\pi iz} = (\cos 2\pi z, \text{sen } 2\pi z)$ , la fórmula anterior para  $f$  queda  $(\cos 2\pi f(\theta), \text{sen } 2\pi f(\theta)) = (1, 0)$ , lo que ocurre si y sólo si  $f(\theta)$  es entero, esto es,  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$ . Como  $f$  es continua,  $\mathbb{R}$  es conexo y las únicas componentes conexas de  $\mathbb{Z}$  son los puntos,  $f$  es constante. Pero  $f(0) = \phi(1) = 0$  mientras que  $f(1) = \phi(e^{2\pi i}) - n = \phi(1) - n = -n$ , así que tenemos una contradicción.  $\square$

Haciendo  $n = 1$  en el Corolario precedente se tiene:

**Corolario 2.8.** *La aplicación identidad de  $S^1$  no es homotópica a una aplicación constante.*

Este corolario resume todos los conocimientos de homotopías y del cuerpo de los números complejos que serán necesarios en la demostración que a continuación se presenta del Teorema del punto fijo de Brouwer.

**Teorema 2.9. (Teorema del punto fijo de Brouwer).** *Sea  $D$  el disco unitario cerrado en  $\mathbb{R}^2$ , con centro en el origen, y sea  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  una aplicación continua con  $f(S^1) \subset D$ . Entonces existe un punto  $x \in D$  tal que  $f(x) = x$ .*

**Demostración:** Supongamos por el contrario que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D$  y definamos  $g : S^1 \rightarrow S^1$  como  $g(u) = r(u - f(u))$  donde  $r : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  es  $r(z) = z/|z|$ . Ambas aplicaciones son continuas y la composición es posible ya que  $f(u) - u$  no se anula para ningún  $u \in S^1$ .

Sea  $H : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación continua  $H(u, t) = u - tf(u)$ . Dicha aplicación no se anula (si  $t = 1$ , porque  $f(u) - u$  no se anula para ningún  $u \in S^1$ , y si  $t < 1$ , porque  $tf(u)$  es un punto del interior del disco, que nunca será igual a  $u$ , que está en la frontera) luego se puede definir la composición  $r \circ H : S^1 \times I \rightarrow S^1$  que es homotopía entre  $(r \circ H)_0 = 1_{S^1}$  y  $(r \circ H)_1 = g$ .

Por otra parte, sea  $G : S^1 \times I \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación continua  $G(u, t) = tu - f(tu)$ . Dicha aplicación no se anula porque  $tu$ , con  $0 < t < 1$ , está contenido en el disco y  $f$  no tiene puntos fijos en él, luego se puede definir la composición  $r \circ G : S^1 \times I \rightarrow S^1$  que es homotopía entre  $(r \circ G)_0 = r(-f(0))$ , que es una constante y  $(r \circ G)_1 = g$ .

Por la transitividad de la relación de homotopía obtenemos que la identidad en  $S^1$  es homotópica a una constante, lo que contradice el lema anterior.  $\square$

Haciendo un poco de historia, este teorema fue probado por vez primera por Brouwer en [2] para cualquier dimensión, no sólo en el plano como aquí. Hay una demostración debida a Knaster, Kuratowski y Mazurkiewicz [5] que usa el Lema combinatorio de Sperner (véase [8]) y que quizá sea la más elemental para el caso  $n$ -dimensional. Asimismo hay varias demostraciones usando grupos de homología y de homotopía. Esta que hemos presentado sólo presupone elementales conocimientos del plano complejo y de la topología general.

### 3 Aplicaciones de los Teoremas de Tietze y Brouwer.

Nos disponemos ahora a emplear el Teorema del punto fijo de Brouwer para construir las herramientas que permitirán probar el Teorema de la curva de Jordan. Supondremos conocido que todo espacio conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.



**Lema 3.1.** *Sea  $n > 1$  y  $K$  un compacto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $\mathbb{R}^n \setminus K$  tiene una componente conexa  $U$  tal que  $\mathbb{R}^n \setminus U$  es acotado. En consecuencia,  $U$  es la única componente conexa no acotada de  $\mathbb{R}^n \setminus K$ .*

**Demostración:** Denotemos mediante  $B_r(x)$  la bola abierta de radio  $r > 0$  y centro  $x$  en  $\mathbb{R}^n$ . Como  $K$  es compacto, es acotado y por tanto hay una bola cerrada  $\overline{B}_r(0)$  que lo contiene. Sea  $E$  el complemento de dicha bola, que estará contenido en  $\mathbb{R}^n \setminus K$ ; si  $n > 1$ ,  $E$  es conexo, luego estará contenido en una componente conexa  $U$  de  $\mathbb{R}^n \setminus K$ . Tomando complementos  $\mathbb{R}^n \setminus U \subset \mathbb{R}^n \setminus E = \overline{B}_r(0)$ , luego  $\mathbb{R}^n \setminus U$  es acotado, luego  $U$  no es acotada (si lo fuese, como  $K$  y  $\mathbb{R}^n \setminus U$  también lo son, lo sería la unión de los tres, que es  $\mathbb{R}^n$ ). Cualquier otra componente  $V$  de  $\mathbb{R}^n \setminus K$  que no sea  $U$  será disjunta con  $U$ , luego  $V \subset \mathbb{R}^n \setminus U \subset \overline{B}_r(0)$ . Es decir,  $U$  es la única componente conexa no acotada; todas las demas (si las hay) son acotadas.  $\square$

El siguiente lema es la clave principal de nuestra demostración del Teorema de la curva de Jordan y no es más que una ingeniosa reformulación del Teorema del punto fijo de Brouwer (de hecho, la presencia aquí de dicho teorema está justificada porque permite la demostración del próximo lema y del Lema 3.3). Intuitivamente dice que si en un rectángulo una curva va del lado derecho al lado izquierdo y otra va del lado de arriba al lado de abajo, entonces ambas curvas se cortan. Este hecho puede parecer evidente al alumno, pero lo es tanto como puede serlo el propio Teorema de la curva de Jordan.

**Lema 3.2.** *Sea  $X = [a, b] \times [c, d]$  y sean  $g, h : [-1, 1] \rightarrow X$  aplicaciones continuas. Sean  $p_1 : X \rightarrow [a, b]$  y  $p_2 : X \rightarrow [c, d]$  las proyecciones a los factores y supongamos que  $p_1(g(-1)) = a$ ,  $p_1(g(1)) = b$ ,  $p_2(h(-1)) = c$  y  $p_2(h(1)) = d$ . Entonces  $g([-1, 1]) \cap h([-1, 1]) \neq \emptyset$  (ver Figura 1).*

**Demostración:** Supongamos por el contrario que  $g([-1, 1]) \cap h([-1, 1]) = \emptyset$ ; definimos entonces  $N(s, t) = \max\{|p_1(g(s)) - p_1(h(t))|, |p_2(g(s)) - p_2(h(t))|\}$  para todo  $s, t \in [-1, 1]$ . Por la hipótesis de reducción al absurdo,  $N(s, t) \neq 0$  para todo  $s, t \in [-1, 1]$ , ya que si para algún punto  $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  fuese  $N(s, t) = 0$ , como es el máximo de dos cantidades no negativas, ambas serían cero y por lo tanto  $g(s) = h(t)$ , lo que estamos suponiendo que no ocurre. Nótese que  $N$  es una función continua por ser máximo de dos funciones continuas.

Definamos ahora  $F : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow [-1, 1] \times [-1, 1]$  como

$$F(s, t) = \left( \frac{p_1(h(t)) - p_1(g(s))}{N(s, t)}, \frac{p_2(g(s)) - p_2(h(t))}{N(s, t)} \right)$$

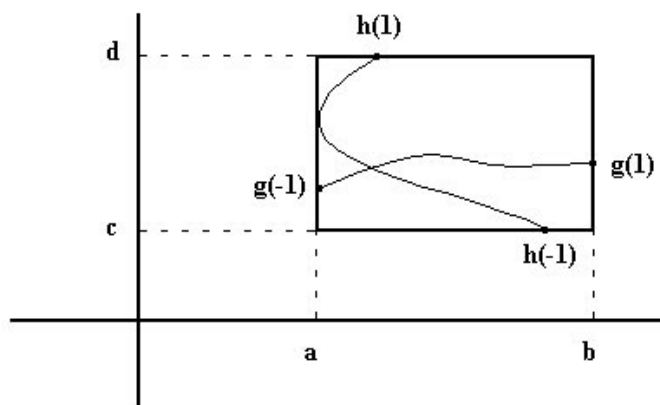


Figura 1: Interpretación geométrica del Teorema del punto fijo de Brouwer.

para todo  $s, t \in [-1, 1]$ .  $F$  es continua por ser en cada componente cociente de continuas, y por la construcción de  $N$ , una de las dos componentes de  $F$  vale  $+1$  o  $-1$ , es decir,  $F([-1, 1] \times [-1, 1]) \subset \text{Fr}([-1, 1] \times [-1, 1])$ .

Como  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  es homeomorfo a la bola cerrada de centro  $0$  y radio  $1$  y el homeomorfismo lleva  $\text{Fr}([-1, 1] \times [-1, 1])$  en  $S^1$  (eso puede quedar como sencillo ejercicio), por el Teorema del punto fijo de Brouwer se tiene que existe  $(s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  tal que  $F(s, t) = (s, t)$ . Pero como  $F(s, t) \in \text{Fr}([-1, 1] \times [-1, 1])$ , habrá de ser  $|s| = 1$  o  $|t| = 1$ .

En el caso de que  $s = 1$ ,  $F(1, t) = (1, t)$  obliga a que

$$1 = \frac{p_1(h(t)) - p_1(g(1))}{N(1, t)} = \frac{p_1(h(t)) - b}{N(1, t)},$$

pero  $p_1(h(t)) \leq b$ , luego la diferencia es negativa y entonces

$$1 = \frac{p_1(h(t)) - b}{N(1, t)} \leq 0,$$

lo que es una contradicción. Análogamente se razonan los otros tres casos ( $s = -1$ ,  $t = 1$  y  $t = -1$ ), llegando a contradicciones que concluyen la demostración.  $\square$

El Teorema de extensión de Tietze [9] se usa para establecer, junto con el Teorema del punto fijo de Brouwer, el siguiente lema, que junto con el Lema 3.2 son las dos piezas clave en la demostración del Teorema de la curva de Jordan.

**Lema 3.3.** *Sea  $C$  una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  no es conexo y  $U$  es una componente conexa suya, entonces  $\text{Fr } U = C$*

**Demostración:** Si  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  no es conexo, tendrá al menos dos componentes conexas. Sea  $U$  una de ellas; cualquier otra componente conexa  $W$  de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  verifica que  $W \cap \overline{U} = \emptyset$ , luego en particular  $W \cap \text{Fr } U = \emptyset$  y dado que también  $U \cap \text{Fr } U = \emptyset$  por ser  $U$  abierto, se tiene que  $\text{Fr } U \subset C$ .

Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que fuese  $\text{Fr } U \neq C$ ; entonces habrá un punto  $p \in C$  que no está en  $\text{Fr } U$  y por ser  $\text{Fr } U$  un compacto (es cerrado en el compacto  $C$ ) existe un arco  $A$  homeomorfo a  $[0, 1]$  (ejercicio) con  $\text{Fr } U \subset A \subset C \setminus \{p\}$ .

Como suponemos que hay al menos dos componentes y sólo una no es acotada por el Lema 3.1, las demás serán acotadas. Sea  $o$  un punto que pertenezca a una componente acotada (si  $U$  es acotada, tomemos  $o \in U$ ) y sea  $\Delta$  un disco centrado en  $o$  que contenga a  $C$  en su interior ( $C$  está acotado), con lo que  $S = \text{Fr } \Delta$  está contenido en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , ya que  $C \subset \Delta^\circ$ , luego  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta^\circ \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$  y  $S \subset \mathbb{R}^2 \setminus \Delta^\circ$  es conexo no acotado, luego estará en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ .

Como  $A$  es homeomorfo a  $[0, 1]$ , por el Teorema de extensión de Tietze (y este es el único uso que aquí vamos a hacer de él) la identidad  $1_A : A \rightarrow A$  se extiende a  $r : \Delta \rightarrow A$ . Definamos  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{o\}$  como

$$g(z) = \begin{cases} r(z) & \text{si } z \in \overline{U} \\ z & \text{si } z \in \mathbb{R}^2 \setminus U \end{cases}$$

si  $U$  está acotada, o bien como

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{si } z \in \overline{U} \\ r(z) & \text{si } z \in \mathbb{R}^2 \setminus U \end{cases}$$

si  $U$  no está acotada.

Como  $\overline{U}$  y  $\mathbb{R}^2 \setminus U$  son cerrados cuya unión es  $\mathbb{R}^2$  y cuya intersección es  $\text{Fr } U \subset A$  y en  $A$  se tiene  $r|_A = 1_A$ , ambas funciones están bien definidas y son continuas (de hecho, la distinción entre que  $U$  esté acotado o no lo esté, se establece únicamente para definir  $r$  en la parte acotada, que es la que está contenida en  $\Delta$  y por tanto donde tiene sentido). Nótese también que  $o$  no está en la imagen en ningún caso.

Sean  $q = g|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \Delta \setminus \{o\}$ ,  $p : \Delta \setminus \{o\} \rightarrow S$  la proyección desde  $o$  a  $S$  y  $t : S \rightarrow S$  la aplicación antípoda ( $S$  es homotética a  $S^1$ ). Como  $q(z) = z$  si  $z \in S$  (pues  $S$  está dentro de la componente no acotada), se tiene que  $t \circ p \circ q : \Delta \rightarrow S$  no tiene ningún punto fijo (si  $z \in \Delta^\circ$ , como la imagen va a parar a  $S$ , seguro que  $z$  no es punto fijo; en cambio, si  $z \in S$   $g(z) = z$  y  $p(z) = z$ , luego  $t(p(g(z)))$  es el antípoda en  $S$  de  $z$ , y tampoco es fijo) lo que contradice el Teorema del punto fijo de Brouwer y prueba por tanto este lema.  $\square$

## 4 El Teorema de la curva de Jordan.

Antes de dar la demostración del Teorema de la curva de Jordan, hagamos un poco de historia del mismo. En la página 92 de su célebre *Cours d'Analyse* ([4]), C. Jordan conjeturó y creyó haber probado el teorema que le inmortalizaría. Sin embargo su demostración no era correcta y por más que lo intentó no consiguió enmendarla. El honor de la primera demostración correcta fue para O. Veblen en 1905 ([10]).

Posteriormente, L. E. J. Brouwer propuso en [1] una generalización  $n$ -dimensional del teorema que sería probada por J. W. Alexander en 1922 y denominada *Teorema de separación de Jordan-Brouwer*. El advenimiento de las teorías de homotopía y homología traería consigo demostraciones de gran brevedad del Teorema de Jordan-Brouwer.

**Teorema 4.1. (Teorema de la curva de Jordan).** *El complemento en el plano de una curva de Jordan  $C$  tiene exactamente dos componentes conexas (una acotada y la otra no acotada) cada una de las cuales tiene a  $C$  por frontera.*

**Demostración:** Para facilitar la lectura y comprensión de la demostración, marcaremos con claridad las diversas fases de la misma. Durante esta demostración se usará la siguiente notación: dados dos puntos  $x, y \in \mathbb{R}^2$  llamaremos  $xy$  al segmento que los une en  $\mathbb{R}^2$ .

1) Comenzaremos por mover la curva hasta situarla en condiciones que faciliten su estudio.

Dado que  $C$  es un compacto (y homeomorfo a  $S^1$ ), existen  $x, y \in C$  tales que  $d(x, y) = \text{diam } C$ . Sea  $L$  la recta que une  $x$  con  $y$ ,  $P$  la recta ortogonal a  $L$  que pasa por  $x$  y  $Q$  la recta ortogonal a  $L$  que pasa por  $y$ . Entonces  $P \cap C = \{x\}$ , ya que si hubiera otro punto  $p \in P \cap C$ ,  $p \neq x$ , por el Teorema de Pitágoras  $d(p, y)^2 = d(p, x)^2 + d(x, y)^2$ , luego  $d(p, y) > d(x, y) = \text{diam } C$ , lo que contradice la elección de  $x$  e  $y$ . Análogamente  $Q \cap C = \{y\}$ .

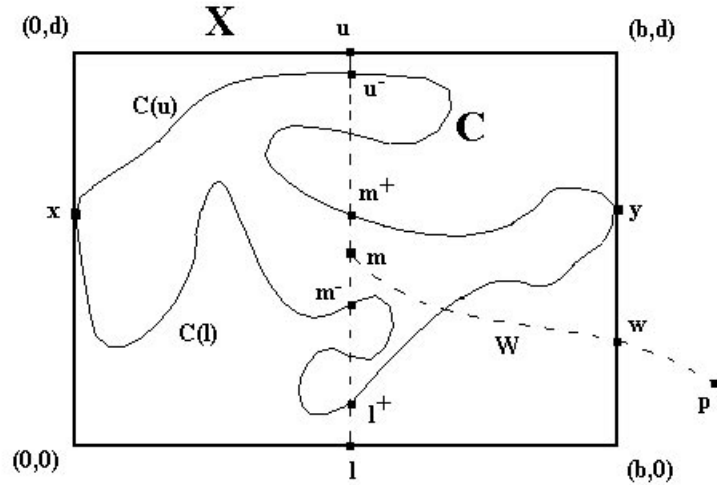


Figura 2: La curva de Jordan tras moverla.

Así pues, mediante una conveniente rotación puede conseguirse que la recta  $P$  sea el eje  $Y$ , la recta  $L$  sea el eje  $X$  y la recta  $Q$  sea una recta vertical que pase por un punto  $(b, 0)$  con  $b > 0$ . En esa situación la curva  $C$  está contenida en la banda que determinan las rectas  $P$  y  $Q$ . Como  $C$  es compacto, existen rectas horizontales  $R$  y  $S$ , por encima y por debajo del eje  $X$  tales que el rectángulo que determinan junto con las rectas  $P$  y  $Q$  contiene a la curva  $C$  y ni  $R$  ni  $S$  cortan a  $C$ . Mediante una apropiada traslación puede conseguirse que una de esas rectas sea el eje  $X$  y la otra sea horizontal y pase por el punto  $(0, d)$  con  $d > 0$ .

Recapitulando (ver Figura 2), podemos suponer que de partida  $C$  está en las siguientes condiciones.

1.  $C \subset X = [0, b] \times [0, d]$ .
  2.  $C \cap (\{0\} \times [0, b]) = \{x\}$  y  $C \cap (\{b\} \times [0, d]) = \{y\}$ .
  3.  $C \cap ([0, b] \times \{0, d\}) = \emptyset$
- 2) Sean  $u = (b/2, d)$  y  $l = (b/2, 0)$ ; dados dos puntos  $e$  y  $f$  del segmento  $ul$ , diremos que  $e \leq f$  si  $p_2(e) \leq p_2(f)$ . Por el Lema 3.2,  $C \cap ul \neq \emptyset$ .

De hecho es el momento de matizar en qué forma se va usar el Lema 3.2 a lo largo de esta demostración. Dicho lema dice que las imágenes de dos funciones continuas definidas en un rectángulo se cortan siempre que una vaya del lado de arriba al lado de abajo y la otra del lado izquierdo al derecho. Claramente el segmento  $ul$  se puede parametrizar y la función continua obtenida está en la condición apropiada, al estar  $u$  en el lado superior y  $l$  en el inferior. Por su parte  $C$  se puede parametrizar de modo que su punto inicial sea  $x$  y quedarnos sólo con el arco que hay hasta llegar a  $y$ . En tal caso tenemos una función continua en la situación apropiada y podremos aplicarle el Lema 3.2 para concluir que la intersección no es vacía. Todo este proceso de parametrización de las curvas para que estén formalmente en las condiciones de dicho lema es obvio, con el consiguiente ahorro de farrago innecesario, ya que cualquiera puede hacerlo sin dificultad. Así pues en los sucesivos usos del lema en esta demostración, simplemente justificaremos que se dan las condiciones exigidas sobre los extremos de los arcos de la curva o de los segmentos que aparecerán e invocaremos el lema.

Como además  $ul$  y  $C$  son compactos, su intersección también lo es, y con el orden antes definido dicha intersección tendrá un máximo  $u^- = \sup(C \cap ul)$ . Los puntos  $x$  e  $y$  dividen a la curva  $C$  (que es homeomorfa a  $S^1$ ) en dos arcos abiertos; llamaremos  $C(u)$  al que contiene a  $u^-$  y  $C(l)$  al otro. Razonando como antes, sea  $m^+ = \inf((C(u) \cup \{x, y\}) \cap ul)$  (nótese que puede ser  $m^+ = u^-$ ).

3) Probemos primero que el segmento  $m^+l$  corta a  $C(l)$ . Para ello, llamemos  $I(u^-, m^+)$  al subarco de  $C(u)$  que une  $u^-$  y  $m^+$ . Entonces  $uu^- \cup I(u^-, m^+) \cup m^+l$  es un arco que une  $u$  con  $l$  y  $C(l)$  es un arco que une  $x$  con  $y$ ; por Lema 3.2, ambos arcos se cortan. Ahora bien, dado que por construcción  $uu^-$  no puede cortar a  $C(l)$  ( $u^-$  está en  $C(u)$  por definición y los puntos de  $uu^-$  están por encima, luego no están en  $C$ , ya que  $u^-$  era el máximo de los que sí estaban) y que también sabemos que  $I(u^-, m^+) \subset C(u)$ , el punto de corte que hemos visto que existe no puede estar sino en  $m^+l$ , luego  $m^+l$  corta a  $C(l)$ .

Razonando como antes, sean  $m^- = \sup(m^+l \cap (C(l) \cup \{x, y\}))$  y  $l^+ = \inf(m^+l \cap (C(l) \cup \{x, y\}))$ ; puede ser que  $m^- = l^+$ . Sea ahora  $m$  el punto medio del segmento  $m^-m^+$ . Como  $m^+ \in ul \cap C(u)$  y  $m^- \in m^+l \cap C(l)$ , ambos son puntos distintos, luego  $m \neq m^+$ ,  $m \neq m^-$  y  $m \notin C$ , dado que si estuviera en  $C$ , o estaría en  $C(l)$  (y entonces estaría debajo de  $m^-$  que es el máximo de  $m^+l \cap (C(l) \cup \{x, y\})$ , lo que es imposible siendo punto medio del segmento  $m^-m^+$ ) o estaría en  $C(u)$  (y se descarta ese caso por un razonamiento similar).

4) Así pues, sea  $U$  la componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  que contiene a  $m$ . Probemos por reducción al absurdo que esa componente es acotada.

Si no lo fuera, sea  $p \in U \setminus X$  (como  $U$  es no acotada,  $U$  no puede estar contenido en  $X$ , luego  $U \setminus X \neq \emptyset$ ); dado que toda componente conexa en  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es arcoconexa ( $\mathbb{R}^2 \setminus C$  es localmente arcoconexo) y que  $p$  y  $m$  están en la misma componente, existe una curva  $\beta : I \rightarrow U$  continua tal que  $\beta(0) = m$  y  $\beta(1) = p$ .

Pero como  $m \in ul \subset X$  y  $p \notin X$ ,  $\beta(I) \cap \text{Fr } X \neq \emptyset$  (ejercicio). Sea  $t' = \inf\{t \in I : \beta(t) \in \text{Fr } X\}$ , que existe porque ese es un subconjunto cerrado ( $\beta$  es continua) de  $I$ , luego es compacto. Sea  $w = \beta(t')$  y  $W = \beta([0, t'])$ . Entonces  $W$  es un arco que une  $m$  y  $w$  contenido en  $X \cap U$  ( $W \subset X$  ya que  $m \in X$  y  $w$  es el primer punto con  $w \in \text{Fr } X$ ;  $W \subset U$  por ser imagen mediante  $\beta$ ).

Por otro lado, los puntos  $x$  e  $y$  desconectan  $\text{Fr } X$  (que es homeomorfo a  $S^1$ ) en dos componentes conexas  $A_1$  y  $A_2$ , una superior (la que contiene a  $u$ ) y otra inferior (la que contiene a  $l$ ). Como  $w \neq x, y$  (ya que  $w \in \beta(I) \subset U \subset \mathbb{R}^2 \setminus C$ , luego  $w \notin C$ ), o bien  $w \in A_1$  o bien  $w \in A_2$ .

Si  $w$  está en el arco inferior  $A_2$ , entonces hay un arco  $A$  (de hecho un trozo del borde del rectángulo) en  $A_2$  que une  $w$  con  $l$  y que no corta a  $C$  (recordemos de la primera parte de esta demostración que  $C$  sólo corta a  $\text{Fr } X$  en  $x$  e  $y$ , que no están en  $A_2$ ).

Entonces  $uu^- \cup I(u^-, m^+) \cup m^+m \cup W \cup A$  es un arco que une  $u$  con  $l$  y que no corta a  $C(l) \cup \{x, y\}$  ( $A$  no lo corta porque está en  $A_2$  y eso no toca a  $C(l) \cup \{x, y\}$ ,  $W$  no lo corta porque está en  $U$ ,  $I(u^-, m^+) \subset C(u)$  tampoco,  $uu^-$  queda por encima de  $C(u)$  y  $m^+m$  queda por encima de  $m^-$ , así que por definición de  $m^-$ , tampoco), lo que contradice el Lema 3.2.

Análogamente, si  $w$  está en el arco superior  $A_1$ , entonces hay un arco  $B$  en  $A_1$  que une  $w$  con  $u$  y que no corta a  $C$ . Así pues,  $ll^+ \cup I(l^+, m^-) \cup m^-m \cup W \cup B$  (donde  $I(l^+, m^-)$  es el subarco de  $C(l)$  que une  $l^+$  y  $m^-$ ) es un arco que une  $l$  con  $u$  y que no corta a  $C(u) \cup \{x, y\}$  (véase el caso anterior), lo que contradice el Lema 3.2.

Por lo tanto  $U$  está acotada.

5) Como consecuencia de lo anterior y de los Lemas 3.1 y 3.3, tenemos que el complemento en el plano de la curva cerrada y simple  $C$  tiene al menos dos componentes conexas (de las cuales sólo una es no acotada y hay al menos una acotada) cada una de las cuales tiene a  $C$  por frontera. Así pues, para completar la demostración del teorema bastará probar que no hay más componente acotada que  $U$ .

Supongamos por el contrario que  $V$  es otra componente conexa acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . Como  $C \subset Y$ , donde  $Y = X^\circ \cup \{x, y\}$ , entonces  $\mathbb{R}^2 \setminus Y = (\mathbb{R}^2 \setminus X^\circ) \setminus \{x, y\}$  es un conexo (por estar entre  $\mathbb{R}^2 \setminus X^\circ$ , que es conexo, y su adherencia) no acotado contenido en  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , luego estará contenido en  $Z$ , la

componente conexa no acotada de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ , que existe en virtud del Lema 3.1. Tomando complementos, se tiene que  $\mathbb{R}^2 \setminus Z \subset Y$ , pero  $\mathbb{R}^2 \setminus Z$  es la unión de  $C$  y de todas las componetes conexas acotadas de  $\mathbb{R}^2 \setminus C$ . En particular la  $U$  que apareció en la parte anterior de esta misma demostración y la  $V$  que suponemos ahora (que son disjuntas, ya que las suponemos distintas) están dentro de  $Y \subset X$ .

Sea  $I(m^-, l^+)$ , como antes, el subarco de  $C(l)$  que une  $m^-$  y  $l^+$  y sea  $H = uu^- \cup I(u^-, m^+) \cup m^+m^- \cup I(m^-, l^+) \cup l^+l$ , que es un arco de  $u$  a  $l$ .

Como  $u$  y  $l$  están en  $\mathbb{R}^2 \setminus Y \subset Z$  y  $uu^-$  y  $ll^+$  son conexos,  $uu^- \subset Z \cup C$  y  $ll^+ \subset Z \cup C$ ; como  $(Z \cup C) \cap V = \emptyset$ , entonces  $uu^- \cap V = \emptyset$  y  $ll^+ \cap V = \emptyset$ .

Dado que  $m \in U$  y  $V \cap U = \emptyset$ , se tiene que  $m^+m^- \cap V = \emptyset$ , ya que  $m^+$  está en  $C(u)$ ,  $m^-$  está en  $C(l)$  y los demás puntos del segmento están en  $U$  (recuérdese la definición mediante supremos e ínfimos de  $m^+$  y  $m^-$ ).

Además  $I(u^-, m^+) \cup I(m^-, l^+) \subset C$ , luego esos dos arcos tampoco cortan a  $V$ . Es decir  $H \cap V = \emptyset$ .

Por otro lado,  $x, y \notin H$  (no están ni en  $C(l)$  ni en  $C(u)$  ni en el segmento  $ul$ ) y  $H$  es compacto, luego se pueden definir los números positivos  $\varepsilon = d(x, H)$  y  $\delta = d(y, H)$ . Entonces  $V_x = B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$  y  $V_y = B_{\frac{\delta}{2}}(y)$  son entornos abiertos de  $x$  e  $y$  respectivamente que no cortan a  $H$ .

Por el Lema 3.3,  $\text{Fr } V = C$ , luego  $C \subset \overline{V}$  y como  $x, y \in C$ ,  $V_x \cap V \neq \emptyset$  y  $V_y \cap V \neq \emptyset$ , esto es, existe  $x_1 \in V_x \cap V$  y como  $x \notin V$ , ese  $x_1$  es distinto de  $x$ ; análogamente existe  $y_1 \in V_y \cap V$  y como  $y \notin V$ , ese  $y_1$  es distinto de  $y$ . Por tanto  $xx_1 \subset V_x \cap X$  (ya que  $V_x$  por ser un disco y  $X$  por ser un rectángulo son convexos de  $\mathbb{R}^2$  y la intersección de convexos es convexa, luego el segmento que una a dos puntos suyos está dentro de dicho convexo) y análogamente  $yy_1 \subset V_y \cap X$ . Como  $V$  es arcoconexo (todos los conexos abiertos de  $\mathbb{R}^2$  lo son) hay un arco  $E$  en  $V$  que une  $x_1$  e  $y_1$ . Así pues  $xx_1 \cup E \cup y_1y$  es un arco en  $V \cup V_x \cup V_y$  que une  $x$  con  $y$  y que no corta a  $H$  (ni  $V$ , ni  $V_x$  ni  $V_y$  cortan a  $H$ ), que a su vez une  $u$  con  $l$ , lo que contradice una vez más el Lema 3.2 y concluye la demostración.  $\square$

## 5 Apéndice

En las tres secciones anteriores nos hemos dirigido hacia un objetivo (el Teorema de la curva de Jordan) con la intención de probarlo de la manera más rápida posible. Así pues no hemos probado nada que no fuese absolutamente necesario para nuestro propósito. Sin embargo, algunos de los resultados que han sido necesarios en este camino tienen consecuencias sumamente interesantes que permiten rentabilizar aún más el esfuerzo desarrollado, y que para



no romper el rápido ritmo seguido relegamos a este apéndice.

El siguiente teorema es equivalente al Teorema del punto fijo de Brouwer en el sentido de que cada uno de ellos puede deducirse del otro de un modo elemental. Se trata del Teorema de no retracción de Borsuk, que aquí presentaremos en una formulación ligeramente más general y que tiene numerosas aplicaciones tanto en Geometría Diferencial como en Topología Algebraica.

**Corolario 5.1. (Teorema de no retracción de Borsuk).** *Sea  $f : D \rightarrow S^1$  una aplicación continua. Entonces para todo  $\lambda \in S^1$  existe  $u \in S^1$  (que depende de  $\lambda$ ) tal que  $f(u) = \lambda u$ . En particular  $S^1$  no es retracto de  $D$ , es decir, no existe  $r : D \rightarrow S^1$  continua tal que  $r|_{S^1} = 1_{S^1}$ .*

**Demostración:**  $F = \lambda^{-1}f : D \rightarrow S^1$  es continua y satisface  $F(S^1) \subset S^1 \subset D$ . Por el Teorema del punto fijo de Brouwer existe  $u \in D$  tal que  $F(u) = u$ . Como  $F(u) \in S^1$ , tenemos que  $u \in S^1$  y basta multiplicar por  $\lambda$  ambos lados de la igualdad.

En cuanto a la segunda afirmación, si existiera  $r : D \rightarrow S^1$  continua tal que  $r|_{S^1} = 1_{S^1}$ , por el párrafo anterior aplicado a  $r$  en el caso  $\lambda = -1 \in S^1$ , existe  $u \in S^1$  tal que  $r(u) = -u$ , lo que contradice  $r|_{S^1} = 1_{S^1}$ .  $\square$

El corolario 2.7 es la pieza básica para una demostración topológica completamente elemental y bastante breve de uno de los más famosos teoremas de las Matemáticas: el Teorema Fundamental del Álgebra. De hecho sólo es superada en brevedad por la demostración que se da recurriendo al Análisis Complejo, que es aún más breve que ésta pero a cambio requiere una teoría más elaborada. Se puede considerar, pues, que ésta es la demostración más sencilla conocida de este teorema.

**Teorema 5.2. (Teorema Fundamental del Álgebra)** *Todo polinomio no constante con coeficientes complejos tiene una raíz compleja.*

**Demostración:** Sea  $P(z) = a_0 + a_1z^1 + \cdots + a_nz^n$  un polinomio con coeficientes complejos de grado  $n > 0$  (por tanto  $a_n \neq 0$ ) y supongamos que no se anula en ningún punto de  $\mathbb{C}$  (en particular  $P(0) = a_0 \neq 0$ ). Sea  $F(z) = a_n + a_{n-1}z^1 + \cdots + a_0z^n$ , que también es un polinomio con coeficientes complejos. Nótese que si  $z \neq 0$ , entonces  $F(z) = z^n P(\frac{1}{z})$ , y como  $P$  no se anula en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $F$  tampoco; pero  $F(0) = a_n \neq 0$ , así que  $F$  y  $P$  no tienen raíces.

Definamos  $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1$  como  $g(z) = z/|z|$  y  $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$  como la composición

$$H(z, t) = g\left(\frac{P(tz)}{F(\frac{1}{z})}\right),$$

que se puede definir dado que ni  $F$  ni  $P$  se anulan nunca.  $H$  es una homotopía entre

$$H_1(z) = g\left(\frac{P(z)}{F\left(\frac{1}{z}\right)}\right) = g\left(\frac{P(z)}{\frac{1}{z^n}P(z)}\right) = g(z^n) = z^n$$

y

$$H_0(z) = g\left(\frac{P(0)}{F(0)}\right) = g\left(\frac{a_0}{a_n}\right)$$

que es una constante, lo que contradice el corolario 2.7.  $\square$

Finalmente mencionamos aquí uno de los teoremas más famosos (y según dicen el más citado) del siglo XX.

**Teorema 5.3 (Kuratowski).**  $K_5$  y  $K_{3,3}$  no se pueden embeber en  $\mathbb{R}^2$ .

La demostración de este teorema (que no reflejaremos aquí) guarda una estrecha relación con el de la curva de Jordan. De hecho en la sección 8-13, página 386, de [7] se propone como ejercicio (con indicaciones) el deducirlo a partir del Teorema de Jordan. El procedimiento sería el siguiente. Primero, definir el concepto de grafo y probar que se puede embeber como un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , lo que permite dar sentido preciso a la cuestión que el Teorema de Kuratowski plantea y resuelve. La demostración por reducción al absurdo se inicia con la observación de que todo ciclo en el grafo se embeberá como una curva de Jordan en  $\mathbb{R}^2$ . De ahí que los vértices restantes estén en una u otra de las dos componentes conexas que dicha curva determina. Repitiendo eso con todos los ciclos y considerando todas las posibilidades acaba por aparecer la contradicción. Esto último parece augurar un sinfín de casos y cierta confusión, pero es posible hacerlo con orden y rigor sin que la demostración se alargue demasiado, aunque de todos modos un poco larga sí es (lo ideal es hacer un caso hasta llevarlo a la contradicción final y dejar los demás como ejercicio), pero compensa ver una demostración realmente completa, elemental y sin dar nada por sobreentendido de este teorema.

## Referencias

- [1] Brouwer, L. E. J., *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, Math. Ann. **69** (1910), 169–175.
- [2] Brouwer, L. R. J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **71** (1912), 97–115.

- [3] Burckel, R. B., *Inessential Maps and Classical Euclidean Topology*, Jahrbuch überlicke Mathematik (1981), 119–137.
- [4] Jordan, C., *Cours d'Analyse*, Paris, 1893.
- [5] Knaster, B., Kuratowski, K., Mazurkiewicz, S., *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für  $n$ -dimensionale Simplexe*, Fund. Math. **14** (1929), 132–137.
- [6] Maehara, R., *The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), 641–643.
- [7] Munkres, J. R. *Topology: a First Course*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [8] Sperner, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Semin. Hamburg. Univ. **6** (1928), 265–272.
- [9] Tietze, H., *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. für die reine und angew. Math. **145** (1915), 9–14.
- [10] Veblen, O., *Theory of Plane Curves in Nonmetrical Analysis Situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **6** (1905), 83–98.