Análisis Matemático VI
Curso 2006/07 - Convocatoria de Junio - 1^a Convocatoria

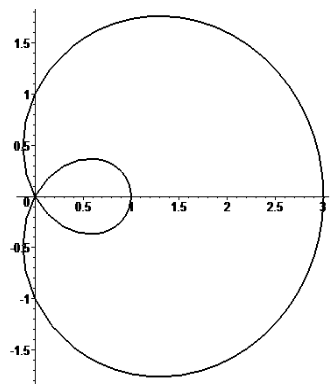
Alumno: ____________________

1. Contestar de forma razonada las siguientes cuestiones:
   (a) ¿Dónde es analítica la función $f(z) = 3z^2 + e^{\bar{z}} + z|z|^4$?
   (b) Se sabe que f es analítica en el anillo $D = \{z : 1 < |z| < 2\}$ y admite un desarrollo de Laurent en dicho anillo de la forma $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Determinar el mayor conjunto donde es analítica f.
   (c) Se sabe que $\mathrm{Log}\,(f(z))$ es analítica en todo punto del disco unidad $\mathbb{D} = D(0,1)$. ¿Qué podemos decir de $f(\mathbb{D})$?
   (d) Se sabe que $\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 0$. Entonces necesariamente $z = 0$ está en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$. ¿Cierto o falso?
   (e) ¿Cómo son las trasnformaciones de Möbius que aplican el círculo $\{|z| = r\}$ en el círculo $\{|z| = s\}$?

2. Sea $L(z)$ una rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = 0, y \leq 0\}$. Hallar el dominio de analiticidad de $f(z) = L(z^2 - 1)$. Calcular $f'(z)$.

3. Sea $f(z) = u + iv$ una función analítica en un dominio G tal que $v(z) = (u(z))^2$. Probar que f es constante.

4. Calcular $\int_\gamma (2z-1)^{-3}\,\mathrm{Log}\,(1+z)\,dz$ donde $\gamma(t) = (2\cos t - 1)e^{it}$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ con gráfica



5. Determinar la imágen de la región $A = \{z : 0 < x < 1\}$ por la transformación de Möbius $L(z) = \frac{z-1}{z}$.

6. Desarrollar $f(z) = (z+1)^{-1}(z+3)^{-1}$ en serie de potencias en $|z+2| < 1$ y $|z+2| > 1$.

7. Si f es una función entera, probar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Análisis Matemático VI
Curso 2006/07 - Convocatoria de Junio - 2^a Convocatoria

Alumno: ____

1. Contestar de forma razonada las siguientes cuestiones:

   (a) Toda función compleja periódica es acotada. ¿Cierto o falso?

   (b) Se sabe que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, luego $\mathrm{Log}\,(f)$ también lo es. ¿Cierto o falso?

   (c) Toda transformación de Möbius aplica el círculo unidad en otra círculo. ¿Cierto o falso?

   (d) f se sabe que es analítica en un dominio Ω y $\overline{D} \subset \Omega$ un disco cerrado totalmente contenido en Ω. Entonces existe $z_1 \in \overline{D}$ tal que $|f(z)| \leq |f(z_1)|$ para todo $z \in \overline{D}$. ¿Contradice esto el Principio del máximo? ¿Qué podemos decir para el resto de puntos en Ω con respecto a $|f(z_1)|$?

   (e) Sea f una función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D} = D(0,1)$. Si $\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0$ para todo camino γ cerrado y regular a trozos en $\mathbb{D}$, entonces $z \notin \mathbb{D}$. ¿Cierto o falso?

2. Considérese la rama analítica del logaritmo en dominio $\mathbb{C} \setminus \{x + iy \,:\, x = y,\, y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $\log 1 = i2\pi$, calcular $\log i$ y $\log(\sqrt{3} + i)$. ¿Es analítica en estos dos puntos?

3. Si f es analítica en un dominio Ω, probar que la existencia de una rama de logaritmo de f es equivalente a que para todo camino cerrado y regular a trozos γ contenido en Ω se verifique $n(f \circ \gamma, 0) = 0$.

4. Determinar la imágen de la región $A = \{z \,:\, 1/2 < |z| < 1\}$ por la transformación de Möbius $L(z) = \frac{z-1}{z-2}$.

5. Una función entera f verifica la estimación $|f(z)| \leq m e^{\alpha x}$ para todo $z = x + iy$, con m y α constantes positivas. Probar que f es de la forma $f(z) = A e^{\alpha z}$ para cierta constante A.

6. ¿En qué discos y anillos de centro $z_0 = -1$ es holomorfa la función

$$f(z) = \frac{7z - 2}{z(z-1)(z-2)}?.$$

   Determinar sus desarrollos de Taylor o de Laurent en cada recinto.

7. Sea $f = u + iv$ una función entera que verifica $u_x v_y - u_y v_x = 1$ en todo el plano complejo. Demostrar que f es de la forma $f(z) = az + b$, con $a, b \in \mathbb{C}$ y $|a| = 1$.