ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 1 - El cuerpo de los números complejos

Problemas propuestos

1. Si $z = 1 + 2i$ y $w = 3 + 4i$, expresar en forma binómica los siguientes números complejos: $3z + iw$, $2z^2 - z\overline{w}$, $2|w| + (1-i)z^2$, $(w+z)/(w-z)$, $(1-iz)/(1+iz)$, $(z+5z^{-1})^{-1}$, $Im(\overline{z}w^2) + 25iRe(zw^{-1})$, $5\cos[\text{Arg}\,(z^2)] + 5i\sin[\text{Arg}\,w]$.

2. Para $z, w \in \mathbb{C}$ arbitrarios, ¿cuáles de las siguientes expresiones son ciertas?

   $a)\ \frac{Rez}{Rew} = Re(\frac{z}{w})$ $\quad b)\ Im(\frac{1}{z\overline{w}}) = Im(\frac{1}{\overline{z}w})$ $\quad c)\ \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = 2Re(\frac{1}{z})$

   $d)\ z\overline{w}(\overline{z}+w) = \overline{\overline{z}w(z+\overline{w})}$ $\quad e)\ Im(\frac{1}{z\overline{z}}) = -Im(\frac{1}{z\overline{z}})$ $\quad f)\ Re(\frac{1}{z\overline{w}}) = Re(\frac{1}{\overline{z}w})$

3. Demuestra que si $z = (\rho)_\theta$ entonces $z^{-1} = (\frac{1}{\rho})_{-\theta}$. Además si $z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}$ y $z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}$ ¿Cómo sería en polares $\frac{z_1}{z_2}$?

4. Expresar en forma polar los siguientes complejos:

   $$(a)\ \frac{(1+i)(2)_{3\pi/4}}{(3)_\pi} \quad (b)\ \frac{3e^{i\pi/2}}{(1+i)4e^{i5\pi/6}} \quad (c)\ \frac{(e^{i\pi/6})^4}{(e^{-i\pi/6})^4}$$

5. Expresar en forma binómica y polar los siguientes complejos:

   a) $(\sqrt{3}+i)^8$ b) $(-1-i)^{-13}(-\sqrt{3}-i)^{13}$ c) $\sqrt{i}$

   d) $\sqrt[3]{-1+i}$ e) $\sqrt[4]{-1}$ f) $(1-i\sqrt{3})^{-1/3}$

   g) e^{3+4i} h) $e^{\frac{1}{1-i}}$ i) $\sin(1-2i)$

6. Sea $a, b \in \mathbb{C}$. Probar la *Indentidad del paralelogramo*: $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$

7. Probar que $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Re(z\bar{w})$.

   a) Apoyándose en esta relación y para cualquier $z \neq 0$ y $w \neq 0$, probar que $|z+w| = |z| + |w|$ si, y solo si, $w = tz$ para algún $t > 0$.

   b) ¿Cuándo se da la igualdad en $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$?

8. Sea $z = x + iy$. Demostrar que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}|z|$.

9. Probar que: a) $\arg\overline{z} = -\arg z$ b) $\arg\frac{z}{w} = \arg z - \arg w$ c) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

10. Expresar $\cos 3\theta$ en términos de $\cos\theta$ y $\sin\theta$.

11. $z^{\frac{1}{m}}$ y $z^{\frac{-1}{m}}$ tienen m valores cada uno. ¿Es cierto para todos estos valores que $z^{\frac{1}{m}}z^{\frac{-1}{m}} = 1$? Estudiar cuando es posible.

12. Probar que $1+z+\cdot\cdot+z^n = (1-z^{n+1})/(1-z)$ se verifica para todo complejo $z \neq 1$ y todo natural n.

13. Sea ω una raiz enésima de la unidad siendo $\omega \neq 1$. Probar
$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1} = 0$$

14. Probar la identidad trigonométrica de Lagrange
$$1+\cos\theta+\cdots+\cos n\theta = \frac{1}{2}+\frac{\sin(n+\frac{1}{2})\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$
Suponiendo que $sen\frac{\theta}{2} \neq 0$.

15. Sea
$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$
   a) Expresarlo en forma binómica y polar.
   b) Probar que $z^4 = z$.
   c) Hallar las raíces cuartas de z.
   d) Halla todos los números complejos que son raíces cuartas de sí mismo.

16. Hallar los números complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado. Hallar la ecuación cuyas raíces sean las soluciones del problema.

17. Encontrar los vértices de un polígono regular de n lados, si su centro se encontrar en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices es z_1.

18. Determinar los puntos de acumulación de las siguientes sucesiones: (i) $z_n = n^{-1}+(-1)^n$; (ii) $z_n = 2^{-n}+(-1)^n+i^n$; (iii) $z_n = [2+\cos(n\pi)]e^{n\pi/5}$; (iv) $z_n = \sin(n\pi/2)+i\cos(n\pi/6)$; (v) $z_n = n\sin(n\pi/2)+i\cos(n\pi/6)$.

19. Describir geométricamente los siguientes conjuntos del plano complejo $\mathbb{C}$:
(i) $\{z\ :\ |z-1| = |z-i|\}$ (ii) $\{z\ :\ |z-1| = 2|z-i|\}$ (iii) $\{z\ :\ |z-1| = x\}$
(iv) $\{z\ :\ (1+i)z+(1-i)\overline{z} = 1\}$ (v) $\{z\ :\ z\overline{z}+iz-i\overline{z}-3 = 0\}$ (vi) $\{z\ :\ |z-i|+|z+i| = 4\}$
(vii) $\{z\ :\ \text{Arg } z = \pi/4\}\cup\{0\}$ (viii) $\{z\ :\ |\text{Arg } z - \text{Arg } i| < \pi/6\}$ (ix) $\{z\ :\ |\text{Arg}\,(z-i)| < \pi/6\}$

20. Probar que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Probar también que, salvo para valores de z reales negativos, $\overline{\log z} = \log\overline{z}$ y $\overline{z^\lambda} = \overline{z}^{\overline{\lambda}}$. ¿Qué ocurre en las últimas expresiones para valores de z reales negativos?.

21. Expresar en forma binómica los siguientes complejos: $\log(-e^2)$, $\log(1-i\sqrt{3})$, $(-1)^i$, $i^{\log i}$, $(-e)^{\pi i}$, $(ie^{\pi/2})^i$.

22. Clasificar cada uno de los siguientes conjuntos como abiertos, cerrados o ninguno de los dos tipos: $A = \{z\ :\ -\pi < Imz \leq \pi\}$, $B = \{z\ :\ 1 < |z| < 2\}$, $C = \{z\ :\ |Rez|+|Imz| \leq 1\}$, $D = \{z\ :\ 0 < \text{máx}\{x,y\} \leq 1\}$, $E = \{z\ :\ y > x^2\}$.

23. Determinar la clausura, frontera e interior de los conjuntos del ejercicio anterior.

24. Clasificar los siguientes conjuntos como conexos o disconexos: $A = \{z\ :\ |z| > 1\}$, $B = \{z\ :\ |z-i| \neq 1\}$, $C = \{z\ :\ x^2-y^2 = 0\}$, $D = \{z\ :\ x^2-y^2 < 1\}$, $E = \mathbb{C}\setminus\{z\ :\ Rez, Imz \in \mathbb{Q}\}$.