ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 1 - El cuerpo de los números complejos

Problemas complementarios: operatoria básica con números complejos

Los siguientes ejercicios ofrecen la oportunidad de practicar la operatoria básica de los números complejos. Se recomienda su realización a todos los alumnos, pero especialmente a aquellos alumnos que encuentren dificultad principalmente en procesos como el cambio en la forma de representar un complejo o la selección de la forma más ventajosa para realizar potencias o raíces de un complejo.

1. Expresar de forma binómica los siguientes complejos:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } (1+i)^3 & \text{b) } \frac{2+3i}{2-4i} & \text{c) } \frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}} \\ \text{d) } \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^5 & \text{e) } e^{-i\pi/4} & \text{f) } e^{1+i\pi} \\ \text{g) } e^{3+i} & \text{d) } \frac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1} & \end{array}$$

2. Expresar de forma binómica y polar los siguientes complejos:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{i(\overline{3-4i})}{(-1+6i)(2+i)^2} & \text{b) } \left(\frac{1+i}{4-8i}\right)^{1/2} & \text{c) } (\sqrt{3}-i)^7 & d)\, (1+i)^9 \\ \text{d) } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^5 & \text{e) } i^{1/5} & \text{f) } (-2\sqrt{3}-2i)^{1/4} & \\ \text{g) } \frac{2_{Pi/3}}{5_{\pi/6}} & \text{h) } 7_{\pi/2}\cdot 3_{\pi/2} & \text{i) } \frac{1_{\pi/4}}{2_{3\pi/4}} & \end{array}$$

3. Determinar la forma polar y representar gráficamente los siguientes números complejos:

$$z_1=-7,\ z_2=6i,\ z_3=\sqrt{3}-i,\ z_4=3+3i,\ z_5=-2-2i,\ z_6=2-\sqrt{2}i$$

4. Calcular: a) $log(1+i)$, b) i^i, c) $\sqrt[4]{-1}$, d) $\sqrt[5]{-4+3i}$,

5. Determinar los valores n que verifican la identidad $(1+i)^n=(1-i)^n$

6. Probar que para todo $x\in\mathbb{R}$
$$\left|\frac{i-x}{1+i2x}-\frac{3i}{4}\right|=\frac{1}{4}$$

7. Resolver la ecuación $z^4-1=0$.

8. Determinar todas las raíces de la ecuación $z^5-z^3+8iz^2-8i=0$

9. Sean z_1 y z_2 dos números complejos distintos. Hallar la relación entre ellos para que $r=\frac{(z_1+z_2)i}{z_1-z_2}$ sea un número real.

10. Encontrar los z tales que $z^3\overline{z}=-1$.