ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 2 - Funciones holomorfas

Funciones elementales, Ec. de Cauchy-Rieman, Holomorfía, operadores ∂ y $\overline{\partial}$

Problemas propuestos

1. Determinar el ángulo con el que es rotada por la función $f(z)=z^2$ toda curva que pase por el punto: a) $z_0=i$; b) $z_0=1+i$.

2. Determinar qué regiones del plano son comprimidas y dilatadas por las siguientes funciones: a) $f(z)=z^2$ b) $f(z)=1/z$.

3. Determinar dónde admiten derivada las siguientes funciones. Hallar el conjunto donde son analíticas.

a) $f(z)=\bar{z}$	b) $f(z)=x^2-y^2-i2xy$
c)$f(z)=z^{10}$	d) $f(z)=z^{-5}$
e) $f(z)=x^2-y^2-2xy+i(2xy+x^2-y^2)$	f) $f(z)=x$
g) $f(z)=e^x\cos y-ie^x\operatorname{sen} y$	h) $f(z)=\cos x+i\operatorname{sen} y$
i) $f(z)=\sqrt{1-\sqrt{z}}$	j) $f(z)=z+z^{-1}$
k) $f(z)=-xy+\frac{i}{2}(x^2-y^2)$	l) $f(z)=(y+1)^2+i(x+1)^2$
m) $f(z)=e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\operatorname{sen}(2xy))$	n) $f(z)=\frac{z^2}{e^z}$
ñ) $f(z)=(z-2\sqrt{z})^{-1}$	o) $f(r,\theta)=r^4\operatorname{sen}4\theta-ir^4\cos 4\theta$
p) $f(r,\theta)=r^2\cos^2\theta+ir^2\operatorname{sen}^2\theta$	q) $f(r,\theta)=\ln r^2+i2\theta$
r) $f(r,\theta)=r\cos\theta+ir$	s) $f(z)=3ze^{iz}+\lvert z\rvert^2+4$
t) $\frac{1}{\cos(iz)}$	u) $\tan z$
v) $\frac{1}{\operatorname{sen} z\operatorname{sen}((i+i)z)}$	x) $\sqrt[3]{z}$.

4. Sea $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ una función analítica en un dominio G y cuya función derivada es también analítica en G. Determinar la expresión de $f''(z)$.

   ¿Qué condiciones adicionales a las ecuaciones de Cauchy-Riemann podemos asegurar que verifican en este caso u y v?

5. **Regla de L'hôspital** para funciones complejas:

   a) Probar el siguiente resultado: Si f y g son dos funciones diferenciables en z_0 tales que $f(z_0)=0=g(z_0)$ y $g'(z_0)\neq 0$ entonces
$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

b) Calcular los siguientes límites:

$$i)\ \lim_{z\to 1}\frac{z^2+z-2}{z^{16}-1}\qquad ii)\ \lim_{z\to i}\frac{z^9+z-2i}{z^{15}+1}\qquad iii)\ \lim_{z\to 0}\frac{e^{\beta e^z}-e^{\beta}}{e^{iz}-1}$$

c) Sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(0)=1$ calcular:

$$i)\ \lim_{z\to 0}\frac{f(2z)}{z}\quad ii)\ \lim_{z\to 0}\frac{f(z^2)}{z}\quad iii)\ \lim_{z\to i}\frac{f(z^2+1)}{z-i}$$

6. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio G verificando que $f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ y que $f(\bar{z})$ es analítica en G. Probar que f es constante.

   Utilizar este argumento para asegurar que $f(z)=(\bar{z})^3+\bar{z}$ no es analítica en ningún punto.

7. ¿Existe alguna función f analítica en $\mathbb{C}$ que verifique $\operatorname{Re} f(z)=x-2y^2$?

8. Determinar la función entera $f(z)$ que verifique $\operatorname{Re} f'(z)=3x^2-4y-3y^2$, $\operatorname{Re} f(0)=6$ y $f(1+i)=0$.

9. Si $f(z)$ y $g(z)$ son dos funciones analíticas en un dominio G tales que $f'(z)=g'(z)$ en todo punto de G, probar que entonces f y g difieren en una constante.

   Utilizar este resultado para probar que si $f'(z)=a\in\mathbb{C}$ para todo z, entonces $f(z)=az+b$.

10. Se dice que una función $u(x,y)$ definida en un dominio D y de clase $C^2(D)$ es una función *armónica* si verifica la ecuación de Laplace en D, esto es, $u_{xx}+u_{yy}=0$.

    a) Si $u(x,y)$ es armónica en D, probar que $f(z)=u_x(z)-iu_y(z)$ es una función analítica en D.

    b) Si $f(z)=u+iv$ es analítica en D, ¿qué podríamos decir de la armoniticidad de u y v?.

11. Sea f una función analítica en un dominio G y que verifica $\operatorname{Arg}[f(z)]=\alpha\in\mathbb{C}$ para todo $z\in G$ donde $f(z)\neq 0$. Probar que f es constante.

12. Sea $f(z)=u+iv$ una función analítica en un dominio G tal que $v(z)=(u(z))^2$. Probar que f es constante.

13. Sea $f=u+iv$ una función entera verificando $u_xv_y-u_yv_x=1$ en todo el plano complejo. Probar que f es de la forma $f(z)=az+b$ con $a,b\in\mathbb{C}$ y $|a|=1$.

14. Determinar los puntos del plano que verifican las siguientes ecuaciones: a) $|e^{z^2}|=1$; b) $|e^{z-1/z}|=1$

15. Determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a)\ e^z=e^{2+i} & b)\ e^z=e^{2z} & c)\ (e^z-1)^2=e^{2z} \\ e)\ (e^z-1)^2=e^z & f)\ (e^z-1)^3=1 & g)\ e^{e^z}=1 \end{array}$$

16. Probar las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{ll} a)\ \operatorname{sen}^2 z+\cos^2 z=1 & b)\ \operatorname{sen}(z_1\pm z_2)=\operatorname{sen} z_1\cos z_2\pm\cos z_1\operatorname{sen} z_2 \\ c)\ \cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\operatorname{sen} z_1\operatorname{sen} z_2 & d)\ \operatorname{sen}^2 z=\frac{1}{2}(1-\cos 2z) \\ e)\ \cos(z+2\pi)=\cos(z) & f)\ \operatorname{sen}(z+2\pi)=\cos(z) \end{array}$$

17. Determinar los complejos tales que $\operatorname{sen} z - \cos z = 0$.

18. Calcular ∂f y $\overline{\partial} f$ para las siguientes funciones.
   a) $f(z) = 2x^3y + i(x^2 - y)$ b) $f(z) = 3z^2 + e^{\bar{z}} + z|z|^4$
   c) $f(z) = \operatorname{Log}(1 - |z|^2)$ d) $f(z) = \sqrt{\frac{\bar{z}}{z}}$

19. Determinar $f(z)$ de forma que sea diferenciable compleja únicamente en el conjunto S para:
   a) $S = \{z : |z|^4 - |z|^2 = 0\}$ b) $S = \{z : \bar{z}e^z - |z|^2 e^{\bar{z}} = 0\}$
   c) $S = \{z : |z| = 1 \text{ ó } |z| = 2\}$