ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 2 - Funciones holomorfas
Ramas, Transformaciones de Möbius

Problemas propuestos

1. Sea la rama del logaritmo definida por $f(z) = \log z = \ln |z| + i\theta$, $0 \leq \theta < 2\pi$. Determinar su dominio de analiticidad. Calcular $f(-e^2)$. ¿Podemos dar un valor de $f(e^2)$ para esta rama analítica?.

2. Considérese la rama analítica del logaritmo en el dominio $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = 0, y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $log(-1) = i\pi$, se pide hallar: a) $\log 1$; b) $\log(ie)$; c) $log(-e - ie)$.

3. Considérese la rama analítica del logaritmo en dominio $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = y, y \leq 0\}$. Si esta rama asigna $\log 1 = i2\pi$, se pide hallar: a) $\log i$ b) $\log(\sqrt{3} + i)$ c) $log(-\sqrt{3} + i)$.

4. Sea la función $f(z) = \mathrm{Log}\,(z - i)$.

   a) Determinar el dominio de analiticidad de esta función.

   b) Hallar $f(-i)$.

5. Probar que $-\,\mathrm{Log}\ z = \mathrm{Log}\,(1/z)$ es válido en el dominio de analiticidad de Log z.

   Determinar otra rama analítica de $\log z$ que no sea la principal de forma que $-\log z = \log(1/z)$ no se verifique en su dominio de analiticidad.

6. Determinar el dominio de analiticidad de $f(z) = \mathrm{Log}\,(z^2 + 1)$.

7. Probar que para cualquiera que sean $\alpha, \beta, z \in \mathbb{C}$ se verifica $1/z^\beta = z^{-\beta}$ y $z^\alpha z^\beta = z^{\alpha+\beta}$.

8. Calcular $f'(z_0)$, considerando la rama principal, para: a) $f(z) = z^{1/4}$, $z_0 = i$; b) $f(z) = z^{1/2}$, $z_0 = -9i$; c) $f(z) = z^z$, $z_0 = i$; d) $f(z) = z^{\operatorname{sen} z}$, $z_0 = i$; e) $f(z) = i^{e^z}$, $z_0 = i$.

9. Si $f(z) = z^{1/2}$ es la rama definida en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x = 0, y \leq 0\}$ y $f(4) = -2$, hallar: a) $f(9)$; b) $f(-1 - i)$; c) $f(9 - i9\sqrt{3})$.

10. Si $f(z) = (z^2 - 1)^{1/2}$ es la rama definida en $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : -1 \leq x \leq 1, y = 0\}$, probar que $z = \pm 1$ son puntos de rama de f.

11. ¿En cuál de los siguientes dominios puede definirse una rama del logaritmo?

    a) $D = \{z : x + y < 0\}$ b) $D = \{z : 1 < |z| < e\}$

    c) $D = \{z : 0 < y - x < 1\}$ d) $D = \{z : 1 < |z| < e\} \setminus \{ti : 1 < t < e\}$

12. Sea $D = \mathbb{C} \setminus (\{0\} \cup \{e^{t+it} : -\infty < t < \infty\})$ y $L(z)$ la rama del logarítmo en D que verifica $L(e) = 1$. Calcular: a) $L(e^6)$; b) $L(-e^8)$; c) $L(ie^{\pi k})$, $k \in \mathbb{Z}$.

13. Determinar la imágen de la región A por la transformación de Möbius L.

a) $A = \{z \,:\, |z| < 1,\, \text{Im}\, z > 0\},\;\; L(z) = \frac{2z-i}{2+iz}$ b) $A = \{z \,:\, 0 < \text{Arg}\, z < \frac{\pi}{4}\},\;\; L(z) = \frac{z}{z-1}$

c) $A = \{z \,:\, 0 < x < 1\},\;\; L(z) = \frac{z-1}{z}$ d) $A = \{z \,:\, 0 < x < 1\},\;\; L(z) = \frac{z-1}{z-2}$

14. Determinar la transformación de Möbius L que lleva los puntos $-1, \infty, i$ en: a) $i, 1, 1+i$; b) $\infty, i, 1$; c) $0, \infty, 1$.

15. Determinar la transformación de Möbius L que lleva el semiplano superior en el disco unidad tal que $L(-1) = 1$, $L(0) = i$, $L(1) = -1$.