ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 3 - Integración compleja

Caminos. Integración a lo largo de caminos. Teorema de Cauchy. Fórmula integral de Cauchy

Problemas propuestos

1. Describir los siguientes caminos indicando si son simples, cerrados y su regularidad.

   a) $\gamma(t) = t^2 + it^4, \ \ -1 \le t \le 1$ b) $\gamma(t) = e^{it^2}, \ \ 0 \le t \le \sqrt{2\pi}$

   c) $\gamma(t) = t^3 + i|t|^3, \ \ -1 \le t \le 1$ d) $\gamma(t) = e^t + ie^{-t}, \ \ 0 \le t \le 1$

2. Dados los caminos α, β y γ definidos en [0,1] por $\alpha(t) = t + it$, $\beta(t) = t + it^2$ y $\gamma(t) = t^2 + it$. Determinar las parametrizaciones de $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$ y $\alpha - \beta + \gamma$.

3. Si $\gamma(t) = te^{it}, \ \ 0 \le t \le \pi$, calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|\,|dz|$ c) $\int_\gamma z\, dz$

4. Si $\gamma(t) = 3t^2 + i2t^3, \ \ 0 \le t \le 1$, calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma x\, dz$ b) $\int_\gamma x\,|dz|$ c) $\int_\gamma |2x + i3y|\,|dz|$

5. Si $\gamma(t) = [e^{2\pi}, 1] + e^{t+it}, \ \ 0 \le t \le \pi$, calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ b) $\int_\gamma |z|^{-1}\,|dz|$ c) $\int_\gamma e^z\, dz$

6. Probar que para todo caminos regular a trozos γ y toda función continua en γ se verifica $\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_{-\gamma} f(z)\,|dz|$.

7. Si $\gamma(t) = e^{1+it}, \ \ 0 \le t \le \pi$, probar que
$$\left| \int_\gamma (\mathrm{Log}\ z)^{-1}\, dz \right| \le e\, \mathrm{Log}\,(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

8. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ verificando $a < b$, y para todo $c \in \mathbb{R}$ sea $I(c) = \int_{c+ia}^{c+ib} e^{-z^2}\, dz$. Deducir que $I(c) \to 0$ cuando $c \to \pm\infty$.

9. Para $b > 0$, probar que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \cos(2b\pi t)\, dt = \sqrt{\pi} e^{-b^2\pi^2}$.

   AYUDA: Considerar $\int_{\partial R} e^{-z^2} dz$ con R el rectángulo de vértices $-c, c, c + b\pi i, -c + b\pi i$ y el ejercicio anterior.

10. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ donde $\gamma_1(t) = e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, $\gamma_2(t) = -1 + 2e^{-2it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$, y $\gamma_3(t) = 1 - i + e^{it}$ $(\pi/2 \le t \le 9\pi/2)$. Determinar los valores de $n(\gamma, z)$ para todos los puntos de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

11. Calcular: (i) $\int_{|z|=1} \sqrt{9 - z^2}\, dz$; (ii) $\int_{|z|=1} (z^2 + 2z)^{-1}\, dz$; (iii) $\int_{|z+i|=3/2} (z^4 + z^2)^{-1}\, dz$.

12. Si $\gamma(t) = 2\cos t + i \operatorname{sen} t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$, calcular las siguientes integrales:

a) $\int_\gamma \operatorname{sen}(z^2)\, dz$ b) $\int_\gamma z^{-1}\, dz$ c) $\int_\gamma (z^2 + 2iz)^{-1}\, dz$.

AYUDA: Para b) pensar en $\int_{|z|=1} z^{-1}\, dz$

13. Calcular: i) $\int_{|z|=1} z^{-1} \operatorname{Log}(z+e)\, dz$; (ii) $\int_{|z-2|=2} (z^2-1)^{-1} \operatorname{Arctg} z\, dz$; (iii) $\int_{|z|=2} (z+1)^{-2} e^z\, dz$.

14. Sea $\gamma = [-1, 1+i] + \beta + [-1+i, 1]$, donde $\beta(t) = i + e^{it}$, $0 \le t \le 3\pi$. Calcular $\int_\gamma (z^2+1)^{-1}\, dz$.

15. a) Para $r > 0$ sea $I(r) = \int_{\gamma_r} z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \pi$. Probar que $I(r) \longrightarrow 0$ cuando $r \to \infty$ y $I(r) \longrightarrow \pi i$ cuando $r \to \infty$.

AYUDA: Para la segunda parte probar primero que $\int_{\gamma_r} z^{-1}(e^{iz} - 1)\, dz \longrightarrow 0$ cuando $r \to 0$.

b) Probar que $\int_0^\infty t^{-1} \operatorname{sen} t\, dt = \pi/2$.

AYUDA: Para $0 < s < r < \infty$ considerar $\int_\gamma z^{-1} e^{iz}\, dz$ donde $\gamma = [s, r] + \gamma_r + [-r, -s] - \gamma_s$ y $\gamma_r(t) = re^{it}$, $\gamma_s(t) = se^{it}$ para $0 \le t \le \pi$.

16. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior determinar $\lim_{k\to\infty} I_k$ donde $I_k = \int_{\gamma_k} z^{-1} \operatorname{sen} z\, dz$ para $\gamma_k(t) = e^{t+it}$ $(t \in [-2k\pi, 2k\pi])$.

17. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_{|z-2i|=2} \frac{\operatorname{arcsen} z}{(z-i)^3}\, dz$ b) $\displaystyle\int_{|z-2|=3/2} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{(z^2-1)^2}\, dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^k}{(z-1)^{k+1}}\, dz \quad (k \in \mathbb{N})$ d) $\displaystyle\int_{\partial Q} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{(z^3+z^2)^1}\, dz$ con Q el cubo de vértices $2, 2i, -2, -2i$.

18. Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$, donde $\gamma_1(t) = 2i + e^{it}$ $(\pi/2 \le t \le 7\pi/2)$, $\gamma_2(t) = e^{-it}$ $(-\pi/2 \le t \le 9\pi/2)$, $\gamma_3(t) = -2i + e^{it}$ $(\pi/2 \le t \le 3\pi/2)$ y $\gamma_4(t) = 3e^{it}$ $(-\pi/2 \le t \le \pi/2)$. Calcular $\int_\gamma (z^4 + 4z^2)^{-1} e^{\pi z}\, dz$.

19. Calcular $\int_\gamma (2z-1)^{-3} \operatorname{Log}(1+z)\, dz$ donde $\gamma(t) = (2\cos t - 1)e^{it}$ para $0 \le t \le 2\pi$.

20. Calcular las siguientes integrales reales haciendo uso de la teoría de integración compleja

$$a)\ \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \operatorname{sen} t} \qquad b)\ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a\cos t + a^2}\ (0 < a < 1)$$