ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 3 - Integración compleja

Consecuencias del Teorema de Cauchy

Problemas propuestos

1. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Definimos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ por $f(z) = (z-1)/\operatorname{Log} z$ si $z \neq 1$ y $f(1) = 1$. Probar que esta función es analítica.

2. Sea f una función analítica en un dominio convexo A y $|f'(z)| \leq m$ para todo z de A. Probar que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq m|z_1 - z_2|$ se verifica para todo par de puntos de A.

3. Si una función f es analítica en un dominio convexo A y si $\operatorname{Re} f'(z) \neq 0$, entonces f es inyectiva en A.

4. Una función analítica en $\mathbb{D}$ verifica $f(0) = 0$ y $|f'(z)| \leq c(1-|z|)^{-n-1}$ en todo el disco con n un entero no negativo y $c > 0$. Probar que $|f(z)| \leq cn^{-1}(1-|z|)^{-n}$ si $n \geq 1$ y $|f(z)| \leq c\operatorname{Log}\left[(1-|z|)^{-1}\right]$ si $n = 0$.

5. Una función entera con $f(0) = 0$ verifica que $\operatorname{Re} f(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$. Probar que $f(z) \equiv 0$. (La misma conclusión se obtendria con la condición $\operatorname{Im} f(z) \to 0$ cuando $|z| \to \infty$.

6. Una función entera f verifica la estimación $|f(z)| \leq me^{\alpha x}$ para todo $z = x+iy$, con m y α constantes positivas. Probar que f es de la forma $f(z) = Ae^{\alpha z}$ para cierta constante A. ¿Podemos concluir lo mismo si la acotación es $|f(z)| \leq e^{\alpha|z|}$?

7. Si f es una función entera, probar que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

   AYUDA: Proceder por reducción al absurdo.

8. Sea f analítica en $\mathbb{D}$ tal que $f(0) = f'(0) = 0$ y $|f'(z)| \leq 1$ para todo z de $\mathbb{D}$. Probar que $|f(z)| \leq |z|^2/2$ en $\mathbb{D}$. ¿Para qué funciones puede verificarse la igualdad en algún $z \neq 0$?.

9. Sea f una función analítica en un dominio convexo A y $|f'(z)| \leq m$ para todo z de A. Probar que $|f(z_1) - f(z_2)| \leq m|z_1 - z_2|$ se verifica para todo par de puntos de A.

10. Sea f una función racional, esto es, $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z)$ y $q(z)$ polinomios sin factores comunes. Entonces podemos escribir

$$f(z) = c(z-z_1)^{m_1}(z-z_2)^{m_2}\cdots(z-z_r)^{m_r}$$

con $c, z_1, .., z_r \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$ y $m_1, .., m_r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Probar que, para un dominio Ω dado, existirá una rama de $\log f(z)$ en Ω si, y sólo si,

$$m_1 n(\gamma, z_1) + m_2 n(\gamma, z_2) + \cdots + m_r n(\gamma, z_r) = 0$$

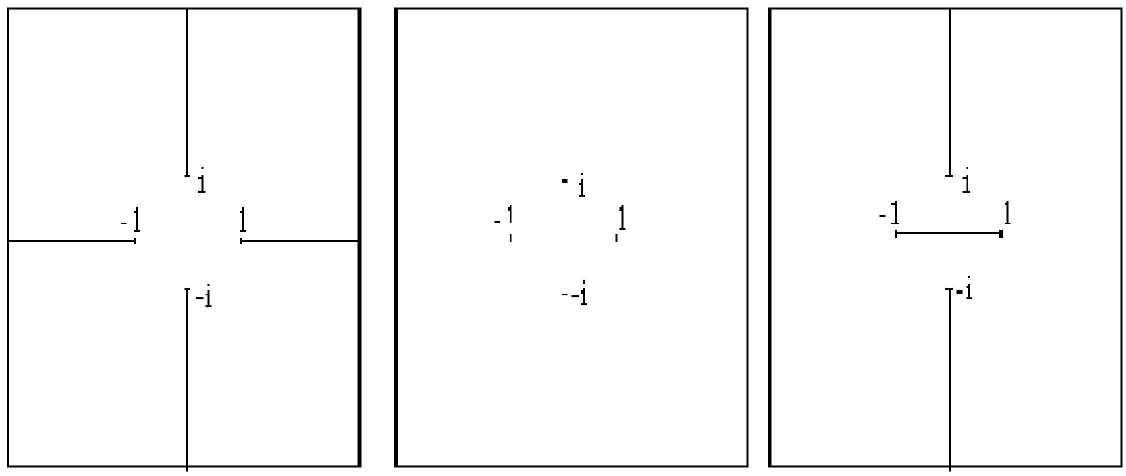
para todo camino cerrado y regular a trozos γ contenido en Ω

11. Determinar qué dominios admiten una rama del logaritmo de $f(z) = 1 - z^{-2}$.

 Estudiar cuáles de los siguientes conjuntos $\mathbb{C} \setminus A$ verifican esta propiedad: a) $A = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$; b) $A = [-1, 0] \cup [1, \infty)$; c) $A = \{te^{it} : -1 \leq t \leq 1\}$.

12. Cuáles de los siguientes conjuntos $\mathbb{C} \setminus A$ existe una rama del $\log[z^{-2}(z+1)^{-1}(z^2+1)]$: a) $A = (-\infty, -1] \cup [0, \infty) \cup \{ti : t \in \mathbb{R}, |t| \geq 1\}$; b) $A = (-\infty, -1] \cup \{ti : -1 \leq t \leq 1\}$; c) $A = (-\infty, 0] \cup \{e^{ti} : -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$.

13. Determinar en qué dominio de los representados existe una rama de $\log \frac{z^2+1}{z^2-1}$. Justifica tu respuesta.



D_1 D_2 D_3

14. Sea f una función analítica en un anillo $D(z_0, a, b) = \{z : a < |z - z_0| < b\}$, donde $0 \leq a < b \leq \infty$. Probar que

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = \int_{|z-z_0|=s} f(z)\, dz$$

 para todo $a < r < s < b$.

15. Sea f una función continua en el disco cerrado $\overline{D(0,r)}$ y analítica en su interior. Probar que $\int_{|z|=r} f(z)\, dz = 0$ y que

$$f^{(k}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

 para todo $z \in D(0,r)$ y todo entero positivo k.

 AYUDA: Considerar las funciones $g_t(z) = f(tz)$ para $0 < t < 1$ y estudiar sus propiedades.