ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tema 4 - Sucesiones y series de funciones analíticas

Desarrollos de Taylor y de Laurent

Problemas propuestos

1. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^{3n} \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n} \quad d)\ \sum_{n=0}^{\infty} (n!) z^n$$

2. Probar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ converge en todo punto del círculo unidad excepto en $z = 1$.

   AYUDA: Demostrar que si $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ es acotada y $\{b_n\}$ es una sucesión decreciente y convergente a cero, entonces $\sum a_n b_n$ es convergente.

3. Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ en $D = D(z_0, \rho)$. Probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{-1} a_n (z - z_0)^{n+1}$ también converge en D a una primitiva de f. Así mismo, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_{n-1} (z - z_0)^{n-1}$ converge en D definiendo la derivada de f.

4. Hallar el desarrollo en serie en el origen de las siguientes funciones, determinar también sus radios de convergencia: a) $f(z) = (1 - z)^{-2}$; b) $f(z) = \mathrm{Log}\,(1 + z^2)$.

5. Hallar el desarrollo en serie en el punto que se indica de las siguientes funciones, determinar también sus radios de convergencia: a) $f(z) = z/(z - 1)^2$, $z_0 = 0$; b) $f(z) = (2z - 4)/(z - 3)^2$, $z_0 = 2$.

6. ¿En qué coronas de centro $z_0 = -1$ es holomorfa la función

$$f(z) = \frac{7z - 2}{z(z - 1)(z - 2)}?.$$

   Determinar sus desarrollos de Laurent en cada recinto.

7. Obtener el desarrollo de Laurent en $z_0 = 0$ de $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$.

8. Determinar el desarrollo de Laurent de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$a)\ f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3},\ z_o = 1 \qquad b)\ f(z) = (z - 3)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{(z+2)},\ z_o = -2$$

$$c)\ f(z) = \frac{z - \mathrm{sen}\, z}{z^3},\ z_o = 0 \qquad d)\ f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)},\ z_o = -2$$

$$f)\ f(z) = \frac{1}{z^2 (z-3)^2},\ z_o = 3$$

9. Desarrollar $f(z) = (z + 1)^{-1}(z + 3)^{-1}$ en serie de potencias en las siguientes regiones: a) $1 < |z| < 3$, b) $|z| > 3$, c) $0 < |z + 1| < 2$.

10. Desarrollar $f(z) = z^{-1}(z - 2)^{-1}$ en serie de potencias en las siguientes regiones: a) $0 < |z| < 2$, b) $|z| > 2$.

11. Desarrollar $f(z) = (z + 1)^{-1}(z + 3)^{-1}$ en serie de potencias en $|z + 3| > 2$.