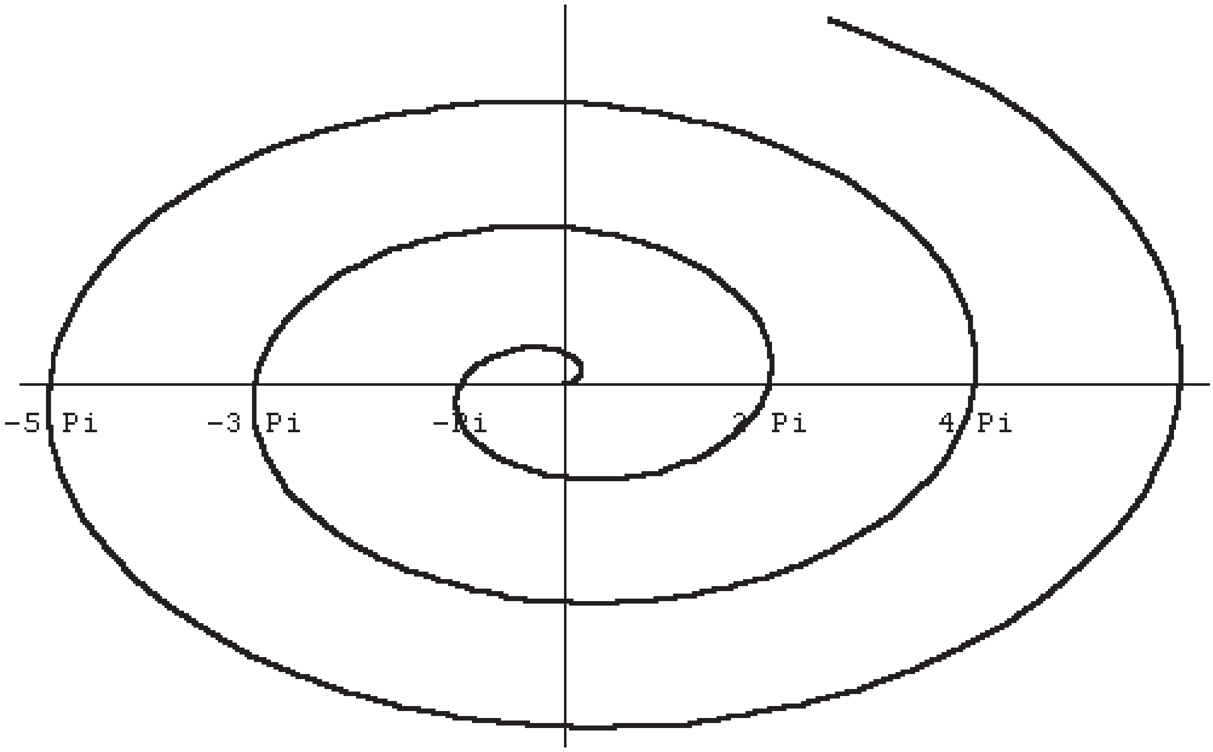
ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Ejemplo de construcción de una rama de logaritmo

Determinar que hay una rama del logaritmo $L(z)$ en el dominio $D = \mathbb{C} \setminus \{te^{it} : 0 \leq t \leq \infty\}$ verificando $L(1) = 0$. Calcular $L(e^{\pi})$ y, para esta rama, $(e^{\pi})^i$.



Debemos definir una función argumento $\theta(z)$ que sea continua en D y verifique $\theta(1) = 0$. Con estas condiciones ya tendríamos asegurado que $L(z) = \ln|z| + i\theta(z)$ determina una rama del logaritmo en D que verifica $L(1) = 0$.

Por las condiciones exigidas tenemos que $\theta(z)$ debe presentar discontinuidades únicamente en $\{te^{it} : 0 \leq t \leq \infty\}$. Dividamos D en regiones disjuntas determinadas por las intersecciones de la espiral con el semieje real negativo, esto es,

$$D = A_{-1} \cup A_0 \cup A_1 \cup \cdots$$

donde A_{-1} es la región determinada por te^{it} para $0 \leq t \leq \pi$, con frontera en el el semieje real negativo $I_{-1} = (-\pi, 0)$, A_0 es la determinada de la misma forma para $\pi \leq t \leq 3\pi$ con frontera $I_0 = (-3\pi, -\pi)$, y así sucesivamente.

Definimos

$$\theta(z) = \operatorname{Arg} z + 2k\pi \quad \text{para } z \in A_k.$$

Tenemos entonces una función que presenta discontinuidades en $\{te^{it} : 0 \leq t \leq \infty\}$ y verifica $\theta(1) = 0$. Sólo resta comprobar que las únicas discontinuidades son las indicadas. Para ello debemos estudiar su comportamiento para los puntos de I_k $(k = -1, 0, ..)$.

Sea $z_0 \in I_k$ un punto arbitrario para cualquier $k \in \{-1, 0, ..\}$, entonces $\theta(z_0) = Arg(z_0) + 2k\pi = (2k+1)\pi$.

Ahora bien, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos en A_k tal que $z_n \to z_0$ cuando $n \to \infty$, se tiene que $Arg(z_n) \to \pi$ cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$\theta(z_n) = Arg(z_n) + 2k\pi \to (2k+1)\pi = \theta(z_0).$$

Por otro lado, si ahora tomamos $\{z_n\}$ una sucesión de números complejos en A_{k+1} tal que $z_n \to z_0$ cuando $n \to \infty$, se tiene en este caso que $Arg(z_n) \to -\pi$ cuando $n \to \infty$, pero no obstante

$$\theta(z_n) = Arg(z_n) + 2(k+1)\pi \to (2k+1)\pi = \theta(z_0).$$

Esto prueba la continuidad en estos puntos quedando así asegurada tal condición en todo el dominio D.

Podemos definir entonces la rama del logaritmo $L(z)$ verificandose además que $L(1) = 0$.

Calculemos ahora $L(e^\pi)$. Primero notemos que $e^\pi \in A_3$, luego $\theta(e^\pi) = 6\pi$ y de aquí, $L(e^\pi) = \pi + i6\pi$.

Para evaluar $(e^\pi)^i$ para esta rama basta recordar que por definición

$$(e^\pi)^i = e^{iL(e^\pi)} = e^{i(\pi + i6\pi)} = -e^{-6\pi}.$$

Este ejemplo ilustra lo poco "intuitiva"que puede ser la definición de una rama del logaritmo. Permite además apuntar que no debemos pensar exclusivamente en semirectas que pasan por el origen como líneas de rama del logaritmo abriendo así el espectro de dominios donde tal definición es posible.

En las hojas de problemas se pueden analizar casos muy similares a éste en los ejercicios 59 y 60.