ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tarea 1: Temas 1 y 2

Los siguientes ejercicios son una propuesta de trabajo que de forma voluntaria se pueden entregar al profesor para su corrección (Fecha límite: Viernes 13/04/07). Se pretende proporcionar al alumno un referente de cómo va su proceso de aprendizaje de los contenidos de la asignatura. Para su realización recomendamos las siguientes pautas de actuación:

- Repasa todo lo relacionado con el problema de forma que sirva de sesión de estudio.
- Si ya has realizado ejercicios similares, revísalos también y compáralos. Comenta con algún compañero la resolución de los problemas, trabajar en equipo es siempre ventajoso.
- Redacta la respuesta de forma individualizada, no importa que la hayas deducido de forma conjunta con otro compañero, el proceso de redacción individual sirve de revisión y en muchos casos ayuda a detectar errores. Por otro lado, ayuda a mejorar tu habilidad de expresión matemática, ya sabes: las matemáticas se piensan, se discuten y se escriben.
- Redacta la respuesta de la forma que más te gustaría que te la presentasen y pensando que la pueda leer y entender otra persona, cuida el orden, la justificación de los razonamientos hechos, la referencia precisa de los resultados teóricos utilizados, etc.

Problemas propuestos

1. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) Todo complejo admite una única representación en forma binómica y polar.

   b) Todo conexo del plano complejo, al ser un región no fraccionada en partes, permite unir por una curva cualquier par de puntos del mismo.

   c) Toda función compleja periódica es acotada.

   d) Las funciones trigonométrica complejas $\operatorname{sen} z$ y $\cos z$ tienen la particularidad de que son no acotadas, al contrario de sus análogas reales que extienden. Por todo esto, tampoco son periódicas.

   e) Para todo $z = x + iy$ con $y \neq 0$ se tiene que $\sqrt{z}$ se encuentra siempre en el semiplano $\{z : \operatorname{Re} z \geq 0\}$.

2. Dar todas las expresiones posibles de f' para una función f derivable en un punto.

3. Dada $f(z) = x^2 + iv(x, y)$, ¿existe $v(x, y)$ que haga f una función entera?

4. Determinar dónde admiten derivada las siguientes funciones. Hallar el conjunto donde son analíticas.

   a) $f(z) = x^2 - y^2 - 2xy + i(2xy + x^2 - y^2)$ b) $f(z) = 3ze^{iz} + |z|^2 + 4$

   c) $f(r, \theta) = r^4 \operatorname{sen} 4\theta - ir^4 \cos 4\theta$

5. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio G verificando que $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ y que $f(\bar{z})$ es analítica en G. Probar que f es constante.

6. Determinar $f(z)$ de forma que sea diferenciable compleja únicamente en el conjunto $S = \{z : |z|^4 - |z|^2 = 0\}$