ANÁLISIS MATEMÁTICO VI. Curso 2006-2007

Tarea 2: Tema 3

Los siguientes ejercicios son una propuesta de trabajo que de forma voluntaria se pueden entregar al profesor para su corrección (Fecha límite: Martes 5/06/07). Se pretende proporcionar al alumno un referente de cómo va su proceso de aprendizaje de los contenidos de la asignatura.

En este Tema 3 será necesario revisar la bibliografía del curso ya que se proponen resultados teóricos más avanzados que en los temas anteriores. Es importante que conozcas mínimamente la bibliografía de la asignatura, que revises los resultados vistos en clase en el libro de texto que se sigue, y si es posible, contrastarlo con otras referencias. Nuestro curso se basa fundamentalmente en el texto de B. P. Palka *"An Introduction to Complex Function Theory"*. Muchos de los resultados que se proponen a continuación puedes encontrarlos en esta obra.

Al igual que en la tarea anterior de los temas 1 y 2, recomendamos las siguientes pautas de actuación para realizar estas:

- Repasa todo lo relacionado con las cuestiones planteadas de forma que sirva de sesión de estudio.
- Si ya has realizado ejercicios similares, revísalos también y compáralos. Comenta con algún compañero la resolución de los problemas, trabajar en equipo es siempre ventajoso.
- Redacta la respuesta de forma individualizada, no importa que la hayas deducido de forma conjunta con otro compañero, el proceso de redacción individual sirve de revisión y en muchos casos ayuda a detectar errores. Por otro lado, ayuda a mejorar tu habilidad de expresión matemática, ya sabes: las matemáticas se piensan, se discuten y se escriben.
- Redacta la respuesta de la forma que más te gustaría que te la presentasen y pensando que la pueda leer y entender otra persona, cuida el orden, la justificación de los razonamientos hechos, la referencia precisa de los resultados teóricos utilizados, etc.
- Si sigues un libro de texto, no te limites a copiarlo. Intenta aclarar todos los apartados, por muy triviales que parezcan, como si fueses a preparar una clase y lo tuvieses que exponer.

  Leer un libro de matemáticas no debe ser una pesadilla para un profesional. Es el principal referente cuando tenemos que enfrentarnos a un problema, ya que es imposible recordar todo lo que nos han explicado y mucho menos saber todo lo que vamos a necesitar en el futuro. Pero como todo, sin práctica es imposible mejorar.
- Debes tener presente que estas cuestiones y ejercicios forman también parte de los contenidos del curso y podrás ser evaluado de los mismos. Cuanto más elaboras las respuestas, más fácil te será volver a estudiarlos.

Problemas propuestos

1. Discutir la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a) La integral de toda función entera a lo largo de cualquier camino cerrado y regular a trozos es cero.

b) Toda función analítica en un disco pinchado $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ puede ser extendida a una función analítica a todo el disco en base al teorema de la sigularidad evitable.

c) Sea f es una función entera tal que

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})\, dt = 0$$

para todo $r > 0$, entonces f es constante, siendo además $f \equiv 0$.

d) Si $f(z)$ es entera, entonces $\operatorname{Log} f(z)$ también es entera con derivada $f'(z)/f(z)$.

e) Si f es analítica en un dominio Ω, que exista una rama de logaritmo de f es equivalente a que para todo camino cerrado y regular a trozos γ contenido en Ω verifica que $n(f \circ \gamma, 0) = 0$

2. Probar el siguiente teorema que asegura la existencia de primitiva y que generaliza el visto en clase para discos y rectángulos con lados paralelos a los ejes. Para su

   Teorema (Existencia de primitivas). *Sea f una función continua en un dominio Ω tal que $\int_\gamma f = 0$ para todo camino cerrado y regular a trozos γ contenido en Ω. Entonces f admite primitiva en Ω.*

3. Este resultado lo planteamos en clase de forma muy intuitiva a partir del significado geométrico del índice de una curva respecto a un punto. Finalizado el tema, podemos dar una demostración analítica rigurosa de sus principales propiedades.

   Sea γ un camino cerrado y regular a trozos y $U = \mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$. Probar las siguientes afirmaciones:

   a) $n(\gamma, z)$ define una función analítica en U.

   b) $n(\gamma, z)$ es constante en cada componente de U. (AYUDA: ¿cuanto vale la derivada de $n(\gamma, z)$?)

   c) $n(\gamma, z) = 0$ para todo z perteneciendo a la componente acotada de U.

4. Sea f una función analítica en un anillo $D(z_0, a, b) = \{z : a < |z - z_0| < b\}$, donde $0 \leq a < b \leq \infty$. Probar que

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)\, dz = \int_{|z-z_0|=s} f(z)\, dz$$

   para todo $a < r < s < b$.

5. Sea f una función entera verificando que $\operatorname{Re} f(z) \leq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Probar que f es constante.

6. Probar el siguiente resultado.

   Lema de Schwartz. *Sea f una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D} = D(0, 1)$ verificando $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces*

$$|f(z)| \leq |z|, \quad z \in \mathbb{D} \tag{1}$$

$$|f'(0)| \leq 1. \tag{2}$$

   Si se da la idualdad en (1) para algún $z \neq 0$ o si se da en (2), entonces $f(z) = \lambda z$ con $|\lambda| = 1$.